التمرين رقم1

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+1}-x & ; \ x\geq 0 \\ f(x)=\frac{4}{\pi}\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) & ; \ x<0 \end{cases}$$

1) أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=0$ على اليمين و اليسار

2) أ- بين أن $f'(x)<0$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)$

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f

3) نضع $I=\left[\frac{1}{4},1\right]$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=1$; $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $f(I)\subseteq I$

ب- بين أن $\left|f'(x)\right|\leq\frac{4}{5}$ $(\forall x\in I)$ و أن $\left|U_{n+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|\leq\frac{4}{5}\left|U_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$: $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

د- بين أن $f\left(\frac{1}{\tan x}\right)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$: $\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

ه- نضع $a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$ (i) أحسب a_0 و بين أن $a_{n+1}=2^{n+1}-a_n$ (ii) بين أن $U_n=\tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$

التمرين رقم2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{-x}+x & ; \ x\leq 0 \\ f(x)=2\sqrt{x^2+1}\arctan x & ; \ x>0 \end{cases}$$
و C_f منحناها في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول : 1) أ- بين أن f متصلة في 0 ثم أدرس قابلية اشتقاق f على يمين و على يسار 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتائج

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ- بين أن $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$: $(\forall x>0)$ و بين أن المستقيم $y=\pi x-2$ مقارب مائل للمنحنى عند $+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى بجوار $-\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أدرس تقعر المنحنى C_f

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty,-1]$ و أن $\alpha^3+4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة α

6) أرسم المنحنى C_f

الجزء الثاني : ليكن g قصور الدالة f على المجال $\mathbb{R}^+$

1) بين أن $g'(x)>2$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)$ ثم استنتج أن $g(x)\geq x$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$

2) أ- بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$

ب- بين أن الدالة العكسية g^{-1} قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ و أن $0<\left(g^{-1}\right)'(x)<\frac{1}{2}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)$

ج- أنشئ منحنى الدالة العكسية g^{-1}

الجزء الثالث : لتكن $(U_n)_n$ متتالية بحيث : $U_{n+1}=g^{-1}(U_n)$; $U_0\in]0,1[$

1) بين أن $0<U_n<1$: $(\forall n\in\mathbb{N})$ و أثبت أن $(U_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

2) بين أن $U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$ و حدد أصغر عدد طبيعي n يحقق $U_n\leq 0,1$