الدوال العكسية	سلسلة تمارين	18-2019

تمرين رقم 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=x\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 0

2) أ) أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب المشتقة $f'(x)$

ب) أدرس تغيرات الدالة f و ضع جدول التغيرات

4) بين ان f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال I يتم تحديده

5) أرسم المنحنيين (C_f) و $(\Gamma_{f^{-1}})$

تمرين رقم 2

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\arctan\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-1}}\right) & x^2\neq 1 \\ f(1)=\dfrac{\pi}{2} \quad ; \quad f(-1)=\dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$$

1) حدد D_f و أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 0 و على يمين 1 ثم على يمين -1

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[-1,0]$ ، أثبت أن g تقابل من $[-1,0]$ نحو مجال J يتم تحديده

و أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين رقم 3

لتكن f دالة عددية معرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & ; \quad x\geq 2 \\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & ; \quad x<2 \end{cases}$$

1- أ) أدرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة 2

2- أحسب نهات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

3- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4- أ) احسب المشتقة على كل من $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$

ب) أدرس رتابة الدالة f على المجال $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$ ثم أنجز جدول تغيرات f

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty,2[$. بين أن g تقابل من $]-\infty,2[$ نحو مجال J يتم تحديده و عرف g^{-1}

تمرين رقم 4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x+2-\sqrt{x^2+2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$$

1) أ) بين ان f متصلة في النقطة -2

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة على يمين و يسار النقطة -2

2) ا) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) أدرس الفرين الانهئيين للمنحنى (C_f)

3) أ) أحسب المشتقة $f'(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,-2[$ و $]-2,+\infty[$

ب) ادرس تغيرات الدالة f و ضع جدول التغيرات

4) أ) بين ان $\quad f(x) \geq 2x+3 \quad \left(\forall x \in]-\infty,-2[\right)$

ب) ارسم المنحنى (C_f)

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty,-2[$

أ) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب) أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J

ج) أرسم منحنى الدالة g^{-1} في المعلم السابق

6) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,2]$

ب) بين ان $\arctan x \leq x \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$

ج) بين أن $1 < U_n \leq 2 \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

د) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج انها متقاربة ثم حدد نهاتيها

تمرين رقم 5

[I نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty,0[$ بما يلي : $h(x) = 2\arctan\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$

1) أحسب $h'(x)$ و بين أن h تناقصية قطعا

2) استنتج أن $h(x) < 0 \quad (\forall x < 0)$

3) بين أن $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (\forall x < 0)$

[II لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty,0]$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) أ) بين أن f متصلة على يسار 0

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 0

2) أ) أحسب النهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ب) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

3) بين أن $f'(x) = (x-1)h(x)$ $(\forall x < 0)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f)

((C_f) يقطع $(\Delta) y = x - 2$ في نقطة أفصولها $\alpha \simeq -0,5$ و (C_f) يوجد تحت (Δ) على $]-\infty;\alpha[$)

تمرين رقم 6

f دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} - Arc\tan(\sqrt{x})$ و (C_f) منحناها في م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. حدد نهايات f عند محدات D_f
3. ادرس تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$
4. لتكن الدالة g حيث : $g(x) = \frac{Arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

أ. حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g

ب. حدد نهايات g عند محدات D_g ثم استنتج مقاربات المنحنى (C_g) الممثل للدالة g

ج. ادرس قابلية الاشتقاق g عند $x_0 = 0$ على اليمين ثم أعط تاويلا هندسيا

د. ادرس تغيرات الدالة g

5. ليكن h قصور الدالة g على $[0;1[$. بين أن g تقابل من $[0;1[$ نحو مجال J ينبغي تحديده

6. أنشئ (C_g) و $(C_{h^{-1}})$

تمرين رقم 7

نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية الدالة f

2- أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

3- أحسب $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

4- أدرس رتابة الدالة f على المجال $I =]0,1]$

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال I .

أ- بين أن تقابل من I نحو مجال J يتعين تحديده و أحسب $g^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$

ب- استنتج أن $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$