التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب المشتقة $f'(x)$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f

3) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0=3$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $1\leq U_n\leq 3$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ج- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1,+\infty[$ بما يلي : $x>-1$; $f(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$ و $f(-1)=1$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين النقطة $x_0=-1$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) ليكن X من المجال $]0,+\infty[$ و نضع : $\varphi(t)=t^3(arx\tan X-X)-X^3(\arctan t-t)$

أ- بين أن φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,x[$ و أحسب المشتقة $\varphi'(t)$

ب- بين أن $\dfrac{-1}{3(1+c^2)}=\dfrac{\arctan X-X}{X^3}$ $(\exists c\in]0,x[)$

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=-1$

4) أ- بين باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أن $\dfrac{X}{1+X^2}\leq\arctan X\leq X$ $(\forall X\in\mathbb{R}^+)$

ب- بين أن $(\forall x\in]1,+\infty[)$ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}-\arctan\sqrt{x+1}\right)$

ج- استنتج أن f تناقصية على $[-1,+\infty[$

5) أ- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\alpha\in]0,1[$

ب- أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 0,7$)

6) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-\arctan x$

أ- أحسب $g'(x)$ و أنجز جدل التغيرات للدالة g

ب- استنتج أن $|g(x)|\leq\dfrac{\pi}{2}$ $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$

ج- بين أن $|f'(x)|\leq\dfrac{\pi}{4}$ $(\forall x\in]0,1[)$

7) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0=\dfrac{1}{2}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $0<U_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- بين أن $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{\pi}{4}|U_n-\alpha|$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها