التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $x \neq 1$; $f(x)=(x-1)\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$ و $f(1)=0$

1) أـ أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$

بـ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$

2) بين أن المستقيم $x=1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4) أـ بين أن $f'(x)=\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{x-1}{1+(x-1)^2}$

بـ بين أن $(\forall t>0)\quad \arctan t>\frac{t}{1+t^2}$ و أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب المشتقة $f'(x)$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f

3) أـ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتعين تحديده

بـ بين أن $f^{-1}(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad (\forall x\in J)$

4) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في المجال $]0,1[$ حلا وحيدا a

5) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أـ بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq U_n<a$

بـ أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

جـ حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-1+\arctan x$

1) أـ أحسب المشتقة $f'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

بـ استنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} يتم تحديد مجموعة تعريفها D

2) أـ بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α و بين أن $0<\alpha<1$

بـ بين أن $f(x)>x\quad (\forall x>\alpha)$

3) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0=a>\alpha$ و $U_{n+1}=f^{-1}(U_n)$

أـ بين أن $U_n>\alpha\quad (\forall n\in\mathbb{N})$

بـ أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

4) أـ بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على D و أن $\left|\left(f^{-1}\right)'(x)\right|\leq\frac{1}{2}\quad (\forall x\in D)$

ب- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_{n+1}-\alpha \le \frac{1}{2}(U_n-\alpha)$

ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الرابع

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $x<1$; $f(x)=\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\right)$ و $f(1)=\frac{\pi}{2}$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f على يسار النقطة $x_0=1$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$ على اليسار

2) أحسب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) اعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $a=-1$

4) احسب المشتقة $f'(x)$ أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أ- بين أن f تقابل من $\left]-\infty,1\right]$ نحو مجال J يتم تحديده

ب- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $b=0$ و أحسب $\left(f^{-1}\right)'(0)$

6) أرسم المنحنيين (C_f) و $(C'_{f^{-1}})$ في نفس المعلم

التمرين الخامس

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & ;\quad x>1 \\ f(x)=x\arctan\sqrt[3]{x^2} & ;\quad x\le 1\end{cases}$$

1) أ- بين أن f متصلة في النقطة $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0=0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب- بين أن المنحنى يقبل عند $-\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=-\frac{\pi}{2}x$

(نذكر أن $\frac{\pi}{2}=\arctan\frac{1}{t}+ar\tan t\ (\forall t>0)$)

3) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ على كل من $]1,+\infty[$ و المجال $]-\infty,1[$

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من المجال $]1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

ب- أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J

5) أرسم المنحنيين (C_f) و (C'_g) في نفس المعلم