Maths:

racine $n^{ème}$

$\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto (x^n)^{-1} = \sqrt[n]{x}$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)$:
$\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$

$\sqrt[n]{\ }$ cont sur $\mathbb{R}^+$ et strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : (\sqrt[n]{x})^n = x$; $\sqrt[n]{x^n} = x$

$(\forall x ; y \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$

$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to A} f(x) = \ell \\ \ell > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to A} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

$\begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{f}$ cont sur I

$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $\quad r \in \mathbb{Q}$

$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

$(a^r)^{r'} = a^{r \times r'}$

$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$

$a^r \cdot b^r = (ab)^r$

$\begin{cases} r > 0 \Rightarrow x^r \text{ cont sur } \mathbb{R}^+ \\ r < 0 \Rightarrow x^r \text{ cont sur } \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

$\begin{cases} u \text{ deri sur } I \\ u(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt[n]{u})$ deri sur I

$\begin{cases} r > 0 : \begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f^r \text{ cont sur } I \\ r < 0 : \begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f^r \text{ cont sur } I \end{cases}$

$(\sqrt[n]{u})'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}}$

$\begin{cases} u \text{ deri sur } I \\ u(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow u^r$ deri sur I

$(u^r(x))' = r\, u^{r-1}(x) \cdot u'(x)$

Arctan

$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$x \longmapsto f^{-1}(\tan(x)) = \text{Arctan}\,x$

$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) :$

$\text{Arctan}\,x = y \iff \tan y = x$

$\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) : \text{Arctan}(\tan x) = x$

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\text{Arctan}\,x) = x$

Arctan est cont et strictement ↗ sur $\mathbb{R}$

$(\forall x ; y \in \mathbb{R}) : \text{Arctan}\,x = \text{Arctan}\,y \iff x = y$

$\lim\limits_{-\infty} \text{Arctan}\,x = -\frac{\pi}{2}$

Arctan est impaire

$\lim\limits_{+\infty} \text{Arctan}\,x = \frac{\pi}{2}$

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan}\,x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}\,x}{x} = 1$

$\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,\frac{1}{x} = \begin{cases} x > 0 & : \frac{\pi}{2} \\ x < 0 & : -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

x et $\text{Arctan}\,x$ ont m̂ signe

$\text{Arctan}'x = \frac{1}{1+x^2}$

$\left\{\begin{array}{l} u \text{ cont sur } I \\ u(I) \subset \mathbb{R} \\ \text{Arctan cont sur } \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow \text{Arctan} \circ u \text{ cont sur } I$

Arctan deri sur $\mathbb{R}$

u deri sur $I \Rightarrow \text{Arctan} \circ u$ deri sur I

$(\forall x \in I) : (\text{Arctan} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$

Théorèmes

TVI

1 - f cont sur $[a;b]$

$\forall \lambda \in [f(a);f(b)]$; $\exists c \in [a;b]$ / $f(c)=\lambda$

2 - $\begin{cases} f \text{ cont sur } [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a;b[\ / \ f(c)=0$

3 - $\begin{cases} f \text{ cont sur } [a;b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \\ f \text{ strictement monotone sur } [a;b] \end{cases} \Rightarrow \exists ! c \in]a;b[\ / \ f(c)=0$

T. de la bij réciproque

f def sur $I \subset \mathbb{R}$

$\begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ f \text{ strictement monotone sur } I \end{cases} \Rightarrow f \text{ bij de } I \text{ vers } f(I)$

$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases}$

T. de Rôlle

$\begin{cases} f \text{ cont } [a;b] \\ f \text{ déri sur }]a;b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a;b[\ / \ f'(c) = 0$

IAF

1 - $\begin{cases} f \text{ cont sur } [a;b] \\ f \text{ déri sur }]a;b[\end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a;b[\ / \ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

IAF

$\begin{cases} f \text{ cont sur } [a;b] \\ f \text{ déri '' }]a;b[\\ (\exists\, m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in]a;b[) \ / \ m \leq f'(x) \leq M \end{cases} \Rightarrow m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

Limites et continuité

Continuité : f continue au pt x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Prolongement par continuité : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ x_0 \notin D_f \end{cases} \Rightarrow \tilde{f} : \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \; ; x \in D_f \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$ est un prol par cont de f en x_0

Composée de fcts :

- lim : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ g \text{ cont en } \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(\ell)$
- cont : $\begin{cases} f \text{ cont sur } I \\ g \text{ cont sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow g \circ f$ cont sur I

Bijection réciproque :

1- f^{-1} et f ont m̂ variations $\begin{cases} f^{-1} \text{ sur } f(I) \\ f \text{ sur } I \end{cases}$

2. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont sym par rapport à $(\Delta) : y = x$

3- f cont sur $I \Rightarrow f^{-1}$ cont sur $f(I)$

4- si $\begin{cases} f \text{ déri sur } I \\ \forall x \in I : f'(x) \neq 0 \end{cases}$ alors f^{-1} déri sur $f(I)$

$$\forall x \in f(I) : \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

$\begin{cases} f \text{ déri sur } I \\ g \text{ déri sur } J \\ f(I) \subset J \end{cases}$

$\Downarrow$

$g \circ f$ déri sur I /

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Suites numériques

(U_n) majorée $\Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}) / (\forall n \in I) : U_n \leq M$

(U_n) minorée $\Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{R}) / (\forall n \in I) : m \leq U_n$

(U_n) bornée $\Leftrightarrow m \leq U_n \leq M$

$(U_n)_{n\in I} \nearrow \Leftrightarrow U_{n+1} \geq U_n$

$(U_n)_{n\in I} \searrow \Leftrightarrow U_{n+1} \leq U_n$

$(U_n)_{n\in I}$ cste $\Leftrightarrow U_{n+1} = U_n$

$(U_n)_{n\in I}$ stationnaire $\Leftrightarrow (\exists n_0 \in I) / (\forall n \geq n_0) : U_n = U_{n_0}$

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Def	$U_{n+1} = U_n + r$ (la raison $\in \mathbb{R}$)	$V_{n+1} = q \cdot V_n$
Terme général	$U_n = U_p + r.(n-p)$	$V_n = V_p \cdot q^{(n-p)}$
Somme	$S_n = \underbrace{U_p}_{1^{er}\text{ terme}} + U_{p+1} + \dots + U_n = \frac{U_n + U_p}{2}(n-p+1)$	$S_n = \begin{cases} V_p \cdot \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ V_p \cdot (n-p+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$
propriété caractéristique	$U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$	$V_n^2 = V_{n-1} \cdot V_{n+1}$

(U_n) convergente si $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : |U_n - \ell| < \varepsilon$

(U_n) divergente si
- $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = \infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) : n \geq N \Rightarrow \begin{cases} U_n > A \\ \text{ou} \\ U_n < -A \end{cases}$
- (U_n) n'a pas de limite

$\lim_{+\infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0)$

$\lim n^\alpha = 0 \quad (\alpha < 0)$

$\lim \sqrt[p]{n} = +\infty$

$\lim \frac{1}{n} = 0$

$\lim \frac{1}{n^p} = 0$

$\lim \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$

$(p > 0)$

$\begin{cases} U_n \geq 0 \quad (\forall n \in I) \\ \lim U_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \ell \geq 0$

$\begin{cases} U_n \geq V_n \\ \lim U_n = \ell, \ \lim V_n = \ell' \end{cases} \Rightarrow \ell \geq \ell'$

$\begin{cases} |U_n - \ell| \leq V_n \\ \lim V_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim U_n = \ell$

$\begin{cases} V_n \leq U_n \leq W_n \\ \lim V_n = \lim W_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim U_n = \ell$

$\begin{cases} U_n \leq V_n \\ \lim V_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

$\begin{cases} U_n \geq V_n \\ \lim V_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim U_n = +\infty$

$\boxed{U_n = f(V_n)}$

$\begin{cases} U_n = f(V_n) \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = \ell \\ f \text{ cont en } \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = f(\ell)$

$\boxed{U_{n+1} = f(U_n)}$

$\begin{cases} \bullet\ f \text{ cont sur } I \\ \quad f(I) \subset I \\ \bullet\ U_{n+1} = f(U_n) \\ \quad U_{n_0} \in I \\ \bullet\ (U_n) \text{ convergente} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = a \ /\ a \text{ \$ de l'eq : } f(x) = x$

$\begin{cases} U_n \nearrow \\ (U_n) \text{ majorée} \end{cases} \Rightarrow (U_n) \text{ convergente}$

$\begin{cases} U_n \searrow \\ (U_n) \text{ minorée} \end{cases} \Rightarrow (U_n) \text{ convergente}$

suite géo

$\lim\limits_{+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ 0 & (-1 < a < 1) \\ \text{pas de lim} & (a \leq -1) \end{cases}$

(U_n) et (V_n) sont adjacentes si $\begin{cases} \text{l'une est } \nearrow, \text{ l'autre } \searrow \\ \lim\limits_{+\infty} (U_n - V_n) = 0 \end{cases}$

(U_n) et (V_n) sont adjacentes $\Rightarrow \begin{cases} (U_n) \text{ et } (V_n) \text{ convergentes} \\ (U_n) \text{ et } (V_n) \text{ ont m̂ limite} \end{cases}$

Fonctions primitives

F une primitive de f sur I ssi $\begin{cases} F \text{ déri sur } I \\ \forall x \in I : \ F'(x) = f(x) \end{cases}$

L'ensemble des primitives de f sur I est : $\{F + k \ / \ k \in \mathbb{R}\}$

f admet une prim sur I ; $(x_0 ; y_0) \in I \times \mathbb{R}$
$\exists$ une unique prim H de f sur I / $H(x_0) = y_0$

$\begin{cases} F \text{ une prim de } f \text{ sur } I \\ G \text{ " " " } g \text{ " "} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F+G \text{ prim de } f+g \text{ sur } I \\ \lambda F \text{ prim de } \lambda f \text{ " "} \end{cases}$

Toute fct cont sur I admet une prim sur I

$f(x)$	$F(x)$
0	a
a	ax
$a x^r \quad r \neq -1$	$a \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}\, x$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a} \cos(ax+b)$
$1 + \tan^2(ax+b) = \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\dfrac{1}{a} \tan(ax+b)$

$(u(x))^r \times u'(x) \quad r \neq -1$	$\dfrac{(u(x))^{r+1}}{r+1}$
$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$\dfrac{1}{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\text{Arctan}\,(u(x))$
$v'(u(x)) \times u'(x)$	$v(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln \lvert u(x) \rvert$
$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a} \ln \lvert ax+b$

Fcts logarithmes

Logarithme népérien → la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. ln ou Log

ln def sur $]0;+\infty[$, strict ↗

$\ln x = \ln y \iff x = y$

$\ln x < \ln y \iff x < y$

$\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$x < 1 \iff \ln x < 0$

$x > 1 \iff \ln x > 0$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\ln(x^r) = r \ln x$

limites

$\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} x^r \ln x = 0^-$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ $r \in \mathbb{Q} / r > 0$

$\lim\limits_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$(+)$ $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$

$= \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$

$= \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln x^{\beta/\alpha}}{x^{\beta/\alpha}}\right)$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \cdot \frac{\ln X}{X}$

$= 0^+$

$\left\{\begin{array}{l} u \text{ deri sur } I \\ u(x) \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x \mapsto \ln|u(x)|$ deri sur I

$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

le signe de $\ln x - \ln a$ est celui de $x - a$ $(+)$

Logarithme à base a, $a > 0$, $a \neq 1$ → fct def sur $]0;+\infty[$ par :

$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln a}$

$\log_a(a) = 1$

$\log_a(a^r) = r$

logarithme décimal → de base 10 log ; $\log 10 = 1$

Fct exponentielle

Exponentiel népérien → bij réciproque de ln, notée $\exp(x)$ ou e^x

$\exp :]-\infty;+\infty[\longmapsto]0;+\infty[$

$\begin{cases} \exp(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

exp strict ↗ sur $\mathbb{R}$ et cont sur $\mathbb{R}$

$\exp(x) \leq \exp(y) \Leftrightarrow x \leq y$

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$e^{x+y} = e^x . e^y$

$(e^x)^r = e^{rx}$

$\lim_{+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{-\infty} e^x = 0^+$

$\lim_{-\infty} x^n . e^x = 0$

$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

u déri sur I $\Rightarrow$ $x \longmapsto e^{u(x)}$ déri sur I

$\forall x \in I : (e^{u(x)})' = u'(x) . e^{u(x)}$

Exponentiel de base a → réciproque de $\log_a$ notée $\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$

$a > 0, a \neq 1$

$\begin{cases} y = \exp_a(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{x\ln a} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

Calcul intégral

$$\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Soit f cont sur I et F sa prim sur I

$F(b)-F(a)$ est l'intégral de f de a à b /

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la prim de f sur I qui s'annule en a

Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x)) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_n} f(x)\,dx$$

$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la prim de f qui s'annule en a

+ pour mq φ déri il faut mq f cont

$\begin{cases} f \text{ cont sur I} \\ u \text{ déri sur J} \\ u(J) \subset I \end{cases} \Rightarrow \varphi(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ est déri sur J

et $\forall x \in J : \varphi'(x) = f(u(x)).u'(x)$

$$\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt \Rightarrow \varphi'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x)$$

Techniques de calcul d'intégrales

1- Utilisat° de primitives

2- Intégrat° par parties

$\begin{cases} u \text{ et } v \text{ déris sur I} \\ u' \text{ et } v' \text{ cont sur I} \end{cases}$

pour le choix de u et v' on utilise ALPES : arctan, log, poly, exp, sin et cos

$$\int_a^b [u(x).v'(x)]dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b [u'(x)v(x)]dx$$

3- Changement de variable

$\begin{cases} f \text{ cont sur I} \\ u \text{ déri sur J} \\ u(J) \subset I \\ u' \text{ cont sur J} \end{cases} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx$

ex : on prend $t = u(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dt}{dx} = u'(x) \text{ ie } dx = \frac{dt}{u'(x)} \\ x = \alpha \Rightarrow t = u(\alpha) \text{ et } x = \beta \Rightarrow t = u(\beta) \end{cases}$

donc $\int_\alpha^\beta f(u(x))\,dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t) \cdot \frac{1}{u'(x)}\,dt$

f cont sur I, $a, b \in I$

Si $\begin{cases} f(x) \geq 0 & \forall x \in I \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

$\begin{cases} a < b \\ f \leqslant g \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

$(a<b)$ $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$

Th. de la médiane

f cont sur $[a;b]$

$\exists c \in [a;b] \,/\, f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt = \mu(f)$ ← valeur moyenne de f

Calcule d'aires + volumes

f cont sur $[a;b]$

L'aire de la partie délimitée par (Ox), $x=a$, $x=b$ et $\mathcal{C}_f$ est $\int_a^b |f(x)|\,dx$ U.A

→ Aire entre 2 courbes : $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ UA

→ Volume d'un solide ~~de révolution~~ : $V(b) = \int_a^b s(t)\,dt$

→ volume du solide ⇒ par la rotat° de $(\mathcal{C}_f)$ autour de (Ox) un tour complet de $[a;b]$ est $V = \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 dx$ U.V

on pose $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$

$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$

f cont sur $[a;b]$ ⇒ (s_n) et (S_n) convergentes vers la m lim /

$$\lim_{+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Nombres Complexes

$x = Re(z) \quad y = Im(z)$

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \,/\, x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \}$

- $x = 0 \Rightarrow z \in i\mathbb{R}$
- $y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}}$

$\boxed{z + z' = x + x' + i(y + y')}$

$\boxed{z.z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)}$

$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}$

$\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + i\left(\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}\right)}$

$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$(x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

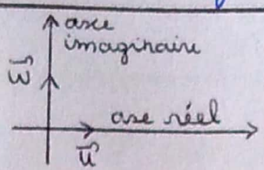
$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

$\boxed{(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, z^k . z'^{\,n-k}}$

$\boxed{(z-z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, z^k . z'^{\,n-k} . (-1)^{n-k}}$

$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

Plan Complexe :



Soit $\varphi : (\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$M(x;y) \longmapsto \varphi(M) = x + iy = z$

la biject° qui associe à chaque M du plan son affixe z

M : image de z

affixe z : $Aff(M)$ ou z_M

$\boxed{A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}}$

$\boxed{(AB) /\!/ (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}}$

$\boxed{G \text{ bary de } \{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \Leftrightarrow z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$

$\boxed{z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}}$

$\boxed{z_{\lambda\vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}}$

$\boxed{z_M = z_{M'} \Leftrightarrow M = M'}$

$\boxed{z_{\vec{AB}} = z_B - z_A}$

$\boxed{z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}}$

Conjugué $\longrightarrow$ $\bar{z} = x - iy$

$\boxed{z + \bar{z} = 2x}$

$\boxed{z - \bar{z} = 2iy}$

$\longrightarrow$

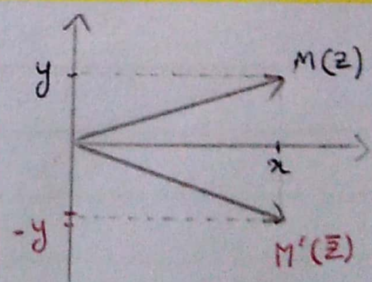
$\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z}$

$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z}$

$\overline{z.z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$



$\boxed{M'(\bar{z}) = S_{(Ox)}\, M(z)}$

Module $\longrightarrow$ $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z.\bar{z}} \in \mathbb{R}^+$

$\boxed{|z| = |\bar{z}| = |-z|}$

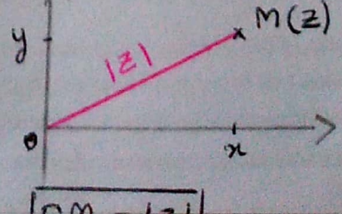
$\boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$ (inégalité triangulaire)

$\boxed{|z \times z'| = |z| \times |z'|}$

$\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}} \quad \boxed{|z^n| = |z|^n}$

$\boxed{Re(z) \leq |z|}$

$\boxed{Im(z) \leq |z|}$



$\boxed{OM = |z|}$

$\cancel{|z+z'| = |z|+|z'|}$

$||z|-|z'|| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|$

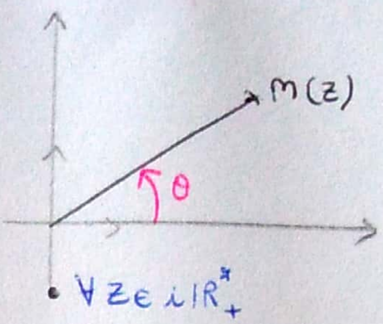
Argument $\longrightarrow$ $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \end{cases}$



- $\forall z \in \mathbb{R}^*_-$ $\arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$
- $\forall z \in \mathbb{R}^*_+$ $\arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$
- $\forall z \in i\mathbb{R}^*_-$ $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $\forall z \in i\mathbb{R}^*_+$ $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Forme trigo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |z| > 0$ module de z

$\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$

coordonnés polaires de $M(z)$

écriture algébr $\longrightarrow$ trigo

Soit $z = x+iy \neq 0$

donc $z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

on a $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$

donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ /
- $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$-\cos\theta + \sin\theta\, i = \cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)$

$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)$

$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$

$z \cdot z' = [r \cdot r', \theta+\theta']$

$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$

$z^n = [r^n, n\theta]$

$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta-\theta'\right]$

Formule de Moivre :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Écriture exp $z = |z|e^{i\theta}$ $\forall z \neq 0$ / $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right)}$

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

(F. d'Euler)

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Transformat géo → comp

	géo	Complexe
angles	$(\vec{e_1}, \vec{AB})$	$\mathrm{Arg}(z_B - z_A)$
	$(\vec{AB}, \vec{CD})$	$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
droites	A, B, C alignés	$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\,[\pi]$ ie $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
	$(AB) // (CD)$	$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$
	$(AB) \perp (CD)$	$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in i\mathbb{R}$
	I milieu de $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
figures	ABCD parallélogramme	$z_B - z_A = z_C - z_D$
	ABCD rectangle	// et $\begin{cases} \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} & (\vec{AB} \perp \vec{AD}) \\ \text{ou} \\ \lvert z_D - z_B \rvert = \lvert z_C - z_A \rvert & (AC = DB) \end{cases}$
	ABCD losange	$\begin{cases} // \\ \text{et} \\ \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}\ (\vec{AC} \perp \vec{BD}) \end{cases}$ ou $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_B \rvert = \lvert z_D - z_B \rvert = \lvert z_D - z_A \rvert$
	ABCD carré	// et $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ $(\lvert AD \rvert = \lvert AB \rvert$ et $\vec{AB} \perp \vec{AD})$
	A, B, C, D cocycliques	$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \wedge \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \notin \mathbb{R}$ $\left((\vec{AC}, \vec{AD}) + (\vec{BD}, \vec{BC}) \equiv 0\,[\pi]\right)$ (ABC non alignés)
triangles	ABC équilatéral	$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$
	ABC rectangle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
	ABC isocèle en A	$\lvert z_C - z_A \rvert = \lvert z_B - z_A \rvert$
	ABC rectangle et isocèle en A	$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

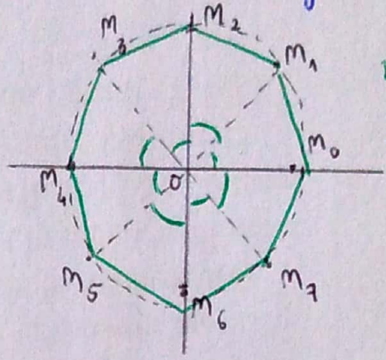
Racines n^e de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$

$= \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [\![0; n-1]\!]\}$

La somme des racines $n^{ème}$ de l'unité est nulle

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_k)$$

Images des racines n^e de l'unité : sommets du polygone fermé régulier inscrit ds le cercle trigonométrique.



$n = 8$ Car $\begin{cases} OM_k = |Z_k| = 1 \\ (\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) \equiv \end{cases}$

$\mathrm{Arg}\left(\frac{Z_{n\,k+1}}{Z_{nk}}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathrm{Arg}\left(e^{\frac{2(k+1)\pi}{n}i - \frac{2k\pi}{n}i}\right)[2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$

μ une racine n^e de a $\Rightarrow$ les autres racines n^e de a sont les n^{bre} comp $z_k = \mu e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]$

racine n^e d'un comp non nul :

$z^n = a \iff z = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ / $k \in [\![0, n-1]\!]$

Eq de 2^{cd} degré à une inconnue

→ racines carrés d'un $z \neq 0$:

• $u = re^{i\theta}$ donc les r.c : $\begin{cases} z_1 = \sqrt{|\mu|}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z_2 = -\sqrt{|\mu|}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$

• $u = a + ib$ z r.c de μ $\iff \begin{cases} z^2 = (x+iy)^2 = a + ib \\ |z|^2 = |\mu| \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} = \alpha \\ y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} = \beta \end{cases}$ $2xy = b$

d'où les r.c $z_k = \pm\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}\cdot i$

Rq : Si $\mu = \alpha i$ ou $\mu = -\alpha i$

$= \frac{\alpha}{2} 2i$ ou $= -\frac{\alpha}{2} \cdot 2i$

$= \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)\right]^2$ ou $= \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1-i)\right]^2$

→ eq de 2^{cd} à 1 inconnue $P(z) = az^2 + bz + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

les 2 $\mathcal{S}$: $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \end{cases}$ / δ racine carrée de Δ

→ si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $\Delta < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \frac{c}{a} \\ z_1 + z_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}}$$

si $\begin{cases} u \cdot v = P \\ u + v = S \end{cases} \Rightarrow$ u et v $\mathcal{S}$ de l'eq $z^2 - Sz + P = 0$

Écriture comp de transformat° usuelles

$\Omega(\omega)$, $M(z)$, $M'(z')$

$\omega = \frac{b}{1-a}$

	géo	complexe
Translat° $T_{\vec{u}}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}(b)$	$z' = z + b$
Homothétie $H(\Omega, k)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z-\omega) + \omega$
Rotation $R(\Omega, \theta)$	$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$
Symétrie axiale (Ox)	$M'(x; -y)$	$z' = \bar{z}$
Symétrie axiale (Oy)	$M'(-x; y)$	$z' = -\bar{z}$
	En général	

(T) : $z' = az + b \;/\; a \neq 0$

$a = 1$

$\Downarrow$ $z' = z + b$ $\Downarrow$ $z' - z = b$ $\Downarrow$ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ $\Downarrow$ $T_{\vec{u}}$

$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

$\Downarrow$ $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \quad (\Omega \text{ invariant}) \end{cases}$ $\Downarrow$ $z' - \omega = a(z-\omega)$ $\Downarrow$ $\overrightarrow{\Omega M'} = a\,\overrightarrow{\Omega M}$ $\Downarrow$ $H_{(\Omega, a)}$

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = i\mathbb{R}$, $|a| = 1$

$\Downarrow$ $\begin{cases} z' = e^{i\theta} z + b \\ \omega = e^{i\theta}\omega + b \end{cases}$ $\Downarrow$ $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ $\Downarrow$ $\begin{cases} \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \\ |z'-\omega| = |z-\omega| \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi] \\ \Omega M' = \Omega M \end{cases}$ $\Downarrow$ $R_{(\Omega, \theta)}$

$a \in i\mathbb{R}$, $|a| \neq 1$

$\Downarrow$ $\begin{cases} z' = |a| e^{i\theta} z + b \\ \omega = |a| e^{i\theta}\omega + b \end{cases}$ $\Downarrow$ $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = |a| e^{i\theta}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} |z'-\omega| = |a|\,|z-\omega| \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} \Omega M' = |a|\,\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$ $\Downarrow$ $R \circ H = H \circ R$

III Composées

$M_{(z)} \xrightarrow{A} M_{1(z_1)} \xrightarrow{B} M'_{(z')}$, $\xrightarrow{B \circ A}$

(A) : $z_1 = az + b$

(B) : $z' = \mu z_1 + V$ $\Rightarrow$ $z' = \mu(az + b) + V$ $(B \circ A)$

$R \circ R'$: $\begin{cases} \text{si } \theta + \theta' \equiv 0\,[2\pi] & \text{translat°} \\ \text{si } \theta + \theta' \not\equiv 0\,[2\pi] & \text{rotat°} \end{cases}$

$H \circ T$: homothétie

$H \circ R$: similitude

$R \circ T$: rotat°

Eqs différentielles

solut° générale de

(E) : $y' = ay$

$$\boxed{y : x \mapsto \alpha e^{ax} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}}$$

(E') : $y' = ay + b$

$$\boxed{y : x \mapsto \alpha e^{ax} - \frac{b}{a} \ / \ \alpha \in \mathbb{R}}$$

(E'') : $y'' + ay' + by = 0$

son eq caractéristique

$r^2 + ar + b = 0$

- $\boxed{\Delta > 0}$ l'eq car admet 2 ∄ $r_1 \neq r_2$

$$\boxed{y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

- $\boxed{\Delta = 0}$ " " 1 ∄ double r

$$\boxed{y = (\alpha x + \beta) e^{rx} \quad \alpha ; \beta \in \mathbb{R}}$$

- $\boxed{\Delta < 0}$ " " 2 ∄ $\in \mathbb{C}$ conjuguées

$r_1 = p + iq$

$r_2 = \bar{r}_1$

$$\boxed{y = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) \cdot e^{px} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

→ **(E''') : $y'' + by = 0$**

- $b < 0$, $\omega = \sqrt{b}$

(E''') : $y'' + \omega^2 y = 0$

$$\boxed{y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)}$$

- $b > 0$, $\omega = \sqrt{-b}$

(E''') : $y'' - \omega^2 y = 0$

$$\boxed{y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}}$$

→ Cas particulier

$\boxed{a = b = 0}$

(E) : $y'' = 0$

$$\boxed{y = \alpha x + \beta}$$

$\boxed{b = 0, \ a \neq 0}$

(E) : $y'' + ay' = 0$

ou

$(y' + ay)' = 0$

$y' + ay = \beta$

$$\boxed{y = \alpha e^{-ax} + \frac{\beta}{a}}$$

$\boxed{a = 0, \ b > 0}$

(E) : $y'' + by = 0$

on pose $\omega = \sqrt{b}$

(E) : $y'' + \omega^2 y = 0$

$$\boxed{y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)}$$

(E) : $y' = ay + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

∃! ∄ à (E) / $y(x_0) = y_0$

Structures algébriques

Loi de composit° interne

$E \neq \emptyset$

$f : E \times E \longrightarrow E$

$(x;y) \longmapsto f(x;y) = x+y \,/\, x \times y \,/\, x * y \,/ \ldots$

f . L de C.I ds E

→ matrice carrée d'ordre 2 à coeff réels : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$M+N = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$MN = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

Partie stable

$(E,\perp)$, $S \subset E$

S partie stable ds $(E,\perp) \Leftrightarrow \forall (x;y) \in S^2 : x \perp y \in S$ (loi induite)

Associativité

$\forall (x,y,z) \in E^3 :$

$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$

Commutativité

$\forall (x;y) \in E^2$

$x \perp y = y \perp x$

elt neutre

$\exists e \in E \,/\, \forall x \in E ;$

$x \perp e = e \perp x = x$

Elt symetrique

x' sym de x ds E

$\Leftrightarrow$

$x \perp x' = x' \perp x = e$

$(E,\perp)$ admet un elt n. e

et a et b de elts symetrisables ds E

$(a \perp b)' = b' \perp a'$

e est unique ds E

$\perp$ associative $\Rightarrow$ le sym de x de E est unique

homomorphismes

$f : E \to F \,/\, (E,\perp)\ (F,T)$

f homomorphisme de $(E,\perp)$ vers (F,T)

Ssi $\forall (x;y) \in E^2 :\ f(x \perp y) = f(x)\, T\, f(y)$

$f(E)$ partie stable de (F,T)

$\perp$ com ds $E \Rightarrow T$ com ds $f(E)$

$\perp$ ass ds $E \Rightarrow T$ ass ds $f(E)$

e elt neutre ds $E \Rightarrow f(e)$ elt .n ds $f(E)$

x' sym de x ds $(E,\perp) \Rightarrow$

$f(x')$ sym de $f(x)$ ds $(f(E),T)$

Elts réguliers

$(E,\perp)$, $a \in E$

a régulier $\Leftrightarrow (x;y) \in E^2 : \begin{cases} x \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y \\ a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y \end{cases}$

Groupes

$(G,*)$ un groupe **Ssi**
- $*$ associative
- $*$ admet un elt neutre (unique)
- tout elt de G est symetrisable

\+ $*$ commutative $\rightarrow$ $(G,*)$ groupe abélien

Sous groupe

$(G,*)$ grp

$S \subset G$

$(S,*)$ sous grp de $(G,*)$

Ssi - S partie stable de $(G,*)$
- $(S,*)$ grp

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ S \neq \emptyset \\ \cdot\ \forall (x;y) \in S^2 : x * y' \in S \end{cases}$

(y' sym de y ds $(G,*)$)

f morphisme de $(E,\perp)$ vers (F,T)
Si $(E,\perp)$ groupe
Alors $(f(E),T)$ groupe

$(E,\perp)$ groupe
- tout elt de E régulier
- l'eq $a \perp x = b \rightarrow x = a' \perp b$
- l'eq $x \perp a = b \rightarrow x = b \perp a'$

Distributivité

$(E,*,T)$

T dist / à $*$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\,T\,(y*z) = (x\,T\,y)*(x\,T\,z) \\ (y*z)\,T\,x = (y\,T\,x)*(z\,T\,x) \end{cases}$ $\forall x;y;z \in E$

Anneau

$(E,*,T)$ anneau **Ssi** $\begin{cases} -\ (E,*)\ \text{grp commutatif} \\ -\ T\ \text{associative} \\ -\ T\ \text{distrib / à } * \end{cases}$

\+ T com $\rightarrow$ anneau com

\+ T admet un elt neutre 1_E $\rightarrow$ anneau unitaire

\+ anneau integre $\rightarrow$ $[x\,T\,y = 0_E \Rightarrow x = 0_E$ ou $y = 0_E]$

Si a inversible ds (E,T) $\Rightarrow$ a n'est pas un div de 0_E

Corps

$(K,*,T)$ corps $\Leftrightarrow \begin{cases} -\ (K,*)\ \text{grp com} \\ -\ T\ \text{dist / à } * \\ -\ (K \setminus \{0_K\}, T)\ \text{grp} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ (K,*,T)\ \text{anneau unitaire} \\ -\ \text{tt elt de } K^*\ \text{admet un sym par } T \end{cases}$

$((K,*,\perp)$ corps $\Rightarrow (K,*,\perp)$ anneau integre$)$

Soit $(A,+,\times)$ anneau et $S \subset A$

S anneau
Pour mq

on mq $\begin{cases} 1-\ (S,+)\ \text{sous grp de } (A,+) \\ 2-\ \times\ \text{L.C.I ds } S\ \text{ie: } S\ \text{stable ds}(A,\times) \\ 3-\ \text{ass et com verifiées ds } A \Rightarrow \text{verifiées ds } S \end{cases}$

Espaces vectoriels réels

$(E,+,\cdot)$ un esp. vect réel ssi E muni de 2 lois
- interne $(+)$
- externe $(\cdot)$: $\cdot : \mathbb{R}\times E \to E$, $(\alpha,x)\mapsto \alpha\cdot x$

i) $(E,+)$ grp com

ii) $(\forall \alpha\in\mathbb{R})(\forall x,y\in E) : \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

iii) $(\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall x\in E) : (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha x+\beta\cdot x$

iv) $(\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall x\in E) : \alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$

v) $\forall x\in E : 1\cdot x = x$

* L.C.I ds E $\Rightarrow$ * L.C.E ds E

Ex : $(\mathbb{R}^n,+,\times)$ $(\mathcal{P}_n,+,\times)$ $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ $(\mathbb{K},+,\times)$ $(\mathbb{C}^n,+,\times)$

$\mathbb{K}$: corps com

$0\cdot\vec{x}=\vec{0}$ $\qquad \alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$

$(-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$

$\alpha\cdot\vec{x}=\vec{0} \iff \alpha=0$ ou $\vec{x}=\vec{0}$

$(-\alpha)\cdot\vec{x}=\alpha\cdot(-\vec{x})=-\alpha\cdot\vec{x}$

$\alpha(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\cdot\vec{x}-\alpha\cdot\vec{y}$

$(\alpha-\beta)\cdot\vec{x}=\alpha\cdot\vec{x}-\beta\vec{x}$

sous e.v IR

F sous e-v de $(E,+,\cdot)$ ssi $\begin{cases} F \text{ p.s de } E \\ (F,+,\cdot) \text{ e-v } \mathbb{R}\end{cases}$

$\iff \begin{cases} F\neq\emptyset \\ \vec{x}+\vec{y}\in F \\ \alpha\cdot\vec{x}\in F\end{cases} \iff \begin{cases}\vec{0}_E\in F \\ \alpha\cdot\vec{x}+\beta\vec{y}\in F\end{cases}$

Comb linéaire

La comb lin des vect $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\in E$ est

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\alpha_i}_{\text{coefs de la combi}}\vec{x}_i$$

Famille génératrice

$F=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$ famille de vect de E IR e.v

F génératrice de E si tt vect de E est comb. lin de $(x_i)_{i\in[1,n]}$

ie $\forall \vec{x}\in E : \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R} / \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

F engendre le vect $\vec{x}$

liée

$\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n /$ $\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0} \\ (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq(0,0,\dots,0)\end{cases}$

l'un des vect s'écrit comme comb linéaire des autres

libre

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_n=0$

$\dim E=\text{card } B$

tt fam contenant $\vec{0}$ est liée

tt fam contenant 2 vect = est liée

une fam est libre $\Rightarrow \vec{x}\neq\vec{0}$

Base d'un e v IR

$B=\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}$ est base de $(E,+,\cdot)$ ssi $\forall\vec{x}\in E, \exists!(\alpha_1,\dots\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$

$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

$\iff$ B fam libre et génératrice

$B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ libre $\iff \det(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\neq 0$

$B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ liée $\iff \det(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=0$

Arithmetiques

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a/b \iff \exists k \in \mathbb{Z} / k.a = b$

$b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

- a/a
- $\begin{cases} a/b \\ b/c \end{cases} \Rightarrow a/c$
- $\begin{cases} a/b \\ b/a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b|$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}\}$ → anneau com unitaire

$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / x \equiv y [n]\}$

$\bar{x} = \{x + kn / k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{x} = \bar{y} \iff x \equiv y [n]$

$\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \iff x \not\equiv y [n]$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$

$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$

$\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$

$d = a \wedge b \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} /$
$d = au + vb$

$\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow d'/a \wedge b = d$

a et b **premiers entre eux** ssi $a \wedge b = 1$

Théorème de Bezout

$a \wedge b = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z} / au + bv = 1$

Théorème de Gauss

$a, b \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} a/bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a/c$

$a \wedge b = 1 \iff a \wedge b^n = 1$

$a \wedge b = 1 \iff a^p \wedge b^n = 1$

Div euclidienne :

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}^*, \exists! q, r \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} /$
$a = b.q + r$ et $0 \leq r < |b|$

a congru à b modulo n
$\iff a \equiv b [n]$
ie $n / a - b$
ie $\exists k \in \mathbb{Z} / a = b + k.n$

$a \equiv b [n] \iff a + c \equiv b + c [n]$

$\begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow a + c \equiv b + d [n]$

$a \equiv b [n] \Rightarrow ac \equiv bc [n]$

$a \equiv b [n] \Rightarrow a^p \equiv b^p [n]$

Pgcd $(a, b) = a \wedge b$

- $a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge b = a \wedge |b| = |a| \wedge |b|$
- $a \neq 0 \Rightarrow a \wedge 0 = |a|$
- $0 \wedge 0$ non déf
- $a, b \in \mathbb{Z}^* : a/b \Rightarrow a \wedge b = |a|$
- $d = a \wedge b$ si $\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow |d'| \leq d$

Algorithme d'Euclide

$a, b \in$
- $\mathbb{N}^*$: $a = bq + r / 0 \leq r < b \Rightarrow a \wedge b = b \wedge r$
- $\mathbb{Z}^*$: $d = a \wedge b$ est le dernier reste $\neq 0$ de la div euclidienne de a par b

$\begin{cases} a/c \\ b/c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$

$(ac) \wedge (bc) = |c| . (a \wedge c)$

$\begin{cases} ax \equiv ay [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow x \equiv y [n]$

$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge (bc) = 1$

$x \wedge y = 1 \Rightarrow x \wedge (zy) = x \wedge z$

Prop caractéristique :

$d = a \wedge b \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z} / \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

$ppcm(a,b) = a \vee b = m$

- a/m , b/m
- ⊕ a/m' , $b/m' \Rightarrow m \leq |m'|$
- $a \vee b = b \vee a$
- $|a| \vee b = a \vee |b| = a \vee b = |a| \vee |b|$
- $a/b \Rightarrow a \vee b = |b|$, $b \neq 0$

nbre premier $p \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$

$p \in \mathbb{P}$

$d/p \Rightarrow d = -1$ ou 1 ou p ou $-p$

$p/a^n \iff p/a$

$p/ab \iff p/a$ ou p/b

$\forall k \in \mathbb{Z} : 1 \leq |k| < p \Rightarrow p \wedge k = 1$

Théorème de Fermat

$p \in \mathbb{P}^+$, $a \in \mathbb{Z}$: $a^p \equiv a [p]$

si $a \wedge p = 1$ alors $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

Eq diophantienne : $ax + by = c$ (E)

l'eq admet une $\mathcal{S}$ ds $\mathbb{Z}^2$

Ssi $a \wedge b / c$

si (x_0, y_0) $\mathcal{S}$ particulière de (E) alors

$S = \left\{ \left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b} ; y_0 - \frac{ka}{a \wedge b} \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\begin{cases} a/m' \\ b/m' \end{cases} \Rightarrow m/m'$

$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |ab|$

$(ac) \vee (bc) = |c| \cdot (a \vee b)$

$a \notin \mathbb{P}$

le plus petit div > 0 de a est premier

$a \notin \mathbb{P} \iff \exists p \in \mathbb{P} / \begin{cases} p/a \\ p \leq \sqrt{a} \end{cases}$

p premier $\iff -p$ premier