Révision

Exercice 1

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$

Partie (1) on pose $g(x)=1+(x-1)e^x$

1) a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) étudier les variations de g

en déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad g(x)>0$

2) a) calculer les limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\quad;\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $+\infty$

3) calculer la dérivée f_n puis déduire que f_n est strictement croissants sur $]0,+\infty[$

4) a) étudier la position relative des courbes (C_2) et (C_1)

b) tracer dans un même repère les courbes $(C_2)\ ;\ (C_1)$

Partie (2) 1) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution α_n et $\alpha_n<1$

2) a) vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n)=\ln\alpha_n$

en déduire que $(\alpha_n)_n$ est croissante

b) montrer que $(\forall x\in]0,1])\quad \dfrac{e^x-1}{x}\le e-1$

c) déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\ge e^{\frac{1-e}{n}}$

puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

Exercice 2

Soit n un entier de $\mathbb{N}$ tel que $n\ge2$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n\quad;\quad x\neq0$

et $f_n(0)=0$

I) 1) a) montrer que f_n est continue à droite de $x_0=0$

b) étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0=0$

2) étudier la branche infinie de (C_n) en $+\infty$

3) a) montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $f_n'(x)=\dfrac{(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)}{2\sqrt{x}}$

b) dresser les tableaux de variations de f_2 et f_3

4) a) étudier la position relative des courbes (C_2) et (C_3)

b) tracer les deux courbes (C_2) et (C_3) dans un même repère

II) soit g_n la restriction de f_n sur $[1,e]$

1) montrer que l'équation $g_n(x)=1$ admet une unique solution notée a_n

2) comparer $g_{n+1}(x)$ et $g_n(x)$ puis déduire la monotonie de la suite $(a_n)_{n\ge2}$

3) on pose $V_n=\ln(a_n)$ pour tout entier $n\ge2$

a) prouver que $2V_n+n\ln V_n=0$

en déduire que $(\forall n\ge2)\quad e^{\frac{-1}{2n}}\le V_n\le1$

b) montrer que $(a_n)_{n\ge2}$ est convergente et déterminer sa limite