2 éme BAC Science math -A-	LYCÉE JAAFAR ELFASSI ELFEHRI	15/05/2017 4 heurs

EXERCICE (1)

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble $H=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -2y & 0 & x+2y \end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

On pose $J=M(1,0)$ et $K=M(0,1)$

1) montrer que $(H,+,\bullet)$ est un espace vectoriel et que (J,K) est une base de H

2) a) montrer que $K^2=-2J+2K$; $J^2=J$ et $JK=KJ=K$

b) déduire que $M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-2yy',xy'+x'y+2yy')$

3) soit φ l'application qui lie toute matrice $M(x,y)$ au nombre complexe $Z=(x+y)+iy$

a) montrer que φ est bijective de H vers $\mathbb{C}$ et $(\forall Z=a+ib\in\mathbb{C})\quad \varphi^{-1}(Z)=M(a-b,b)$

b) montrer que φ est un morphisme de $(H,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$

4) déduire que $(H,+,\times)$ est un corps commutatif

5) on pose $B=M\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ et $A=M(-1,1)$

a) déterminer l'inverse de B et montrer que $A^{2017}=A$

b) résoudre dans H l'équation $X^2+J=0$

EXERCICE (2)

(I) soit m un nombre complexe .

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2-(2m+5i)z+2m^2+(1+i)m-2(5+i)=0$

et on pose $P(m)=-4m^2-4m(1-4i)+15+8i$

1) a) vérifier que $P(m)=(2im+4+i)^2$

b) résoudre l'équation (E)

2) déterminer les valeurs de m pour lesquelles m est solution de (E)

(II) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux application f et g :

$f:(P)\to(P)$
$M(Z)\to M'(Z'=(1+i)Z+2+3i)$

$g:(P)\to(P)$
$M(Z)\to M''(Z''=(1-i)Z-2+2i)$

1) on pose $M_1=(g\circ f)(M)$

a) montrer que l'affixe de M_1 s'écrit $Z_1+3+3i=2(Z+3+3i)$

b) déduire la nature de $g\circ f$ et ses éléments caractéristiques

2) a) montrer que $Z''=-iZ'-5+4i$

b) montrer que M'' est l'image de M' par une rotation en déterminant le centre Ω et l'angle

c) déterminer en fonction de Z l'affixe Z_I du point I milieu $[M'M'']$

3) montrer que si M' est différent de Ω alors (ΩI) et $(M'M'')$ sont perpendiculaire

EXERCICE (3)

Pou r tout entier naturel n supérieur à 2 on pose $a_n = \underbrace{11......1}_{n\,fois}$

1) a) montrer que $9a_n = 10^n - 1$

b) déduire que $2017 \mid a_{2016}$ (on donne 2017 un nombre premier)

2) soient p et m deux entiers naturels tels que $2 \le p < m$

a) montrer que $a_m - a_p = 10^p a_{m-p}$

b) montrer que si $a_m \equiv a_p \; [1963]$ alors $1963 \mid a_{m-p}$

c) déduire qu'il existe un nombre N qui s'écrit en base décimal avec le chiffre 1 et divisible par 1963

PROBLÈME

(I) 1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{x-1} \ge x$

2) soit m un élément de $]1,+\infty[$ et g_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $g_m(x) = x(m - \ln x) - m$

a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_m(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_m(x)$

b) étudier les variations de g_m

c) montrer que l'équation $g_m(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α_m telle que $\alpha_m > e^{m-1}$

d) vérifier que $4 < \alpha_2 < 5$

(II) on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x-1}$; $x \ne 1$ et $f(1) = 0$

1) a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

b) vérifier que f est continue au point 1 puis étudier la dérivabilité de f au point 1

2) a) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}\right) \quad f'(x) = \dfrac{\ln x}{x(x-1)^2} g_2(x)$

b) montrer que $f(\alpha_2) = 4\dfrac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2^2}$ et donner le tableau de variation de f (on donne $\alpha_2 \simeq 4,9$)

(III) on considère les deus fonctions F et G définies sur $[1,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^2}{t^2}\,dt$$

2 éme BAC Science math -A-	LYCÉE JAAFAR ELFASSI ELFEHRI	15/05/2017 4 heurs

1) montrer que $(\forall x > 1)\ \ G(x) = 2 - \frac{1}{x}\left((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\right)$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} G(x)$

2) on suppose que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = l$ un nombre fini . montrer que $0 < l < 4 + F(2)$

(IV) pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on considère les fonctions G_n et F_n définies sur $[1,+\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^{n+1}}dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^2}{t^{n+1}}dt$$

1) montrer que $(\forall x \geq 1)\ 0 \leq F_n(x) \leq \frac{4(\alpha_2 - 1)}{n\alpha_2^2}$

2) en utilisant un changement de variable $t = \sqrt[n]{u}$ montrer que $G_n(x) = \frac{1}{n^3}G(x^n)$

puis déduire $\lim_{x\to+\infty} G_n(x)$

3) montrer que $\sum_{k=1}^{k=n} G_k(x) = F(x) - F_n(x)$

4) on pose $U_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ montrer que $l - U_n = 2\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^3}$

5) montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^3} = \frac{l}{2}$

Bonne chance