

**Exercice 1 ( 2.5 pts )**

On pose  $I = ]-1,1[$ , on définit sur  $I$  la lois  $*$  telle que  $(\forall (a,b) \in I^2) a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

1) Montrer que  $*$  est commutative , associative dans  $I$

ن 0,75

2) Montrer que  $(I,*)$  est un groupe commutatif

ن 0,5

3) On considère l'ensemble  $E = \left\{ P_a = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} / a \in I \right\}$

a) Montrer que  $(\forall (a,b) \in I^2) P_a \times P_b = P_{a*b}$

ن 0,5

b) En déduire que  $(E,\times)$  est un groupe commutatif et déterminer  $P_a^{-1}$

ن 0.75

**Exercice 2 ( 3 pts )**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) Z^2 - (\sqrt{3} + 3i)Z + 2(-1 + i\sqrt{3}) = 0$

ن 0,5

1) vérifier que le discriminant de  $(E)$  s'écrit  $\Delta = (\sqrt{3} - i)^2$  puis résoudre  $(E)$

2) le plan  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

on pose  $b = 2i$  ;  $a = \sqrt{3} + i$  et on considère les points  $B(b)$  ;  $A(a)$  .

$R_1$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  ;  $R_2$  la rotation de centre  $B$

ن 0,5

et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  . On considère l'application  $f = R_2 \circ R_1$

a) montrer que  $f(B) = A$

ن 0,5

b) soit  $M(m)$  un point du plan  $(P)$  . on pose  $N = R_1(M)$  et  $M' = f(M)$

ن 0.75

(i) déterminer en fonction de  $m$  le nombre  $n$  affixe de  $N$

ن 0,5

(ii) montrer que l'affixe de  $M'$  est  $m' = -m + 3i + \sqrt{3}$  en déduire la nature de  $f$

ن 0,25

c) vérifier que  $\frac{m' - m}{n - m} = 1 + i\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} - 3i}{m}$

ن 0,5

déterminer l'ensemble des points  $M(m)$  pour que  $M'$  ,  $N$  et  $M$  soient alignés

**exercice 3 ( 3.25 pts )**

ن 0,75

1) montrer que  $19^5 \equiv 15 \pmod{26}$

ن 0,5

2) soit  $x$  un entier relatif

ن 0,5

Montrer que  $x^{13} - x$  est divisible par 2 en déduire que  $x^{13} \equiv x \pmod{26}$

3) montrer que si  $x^5 \equiv y \pmod{26}$  alors  $y^5 \equiv x \pmod{26}$

4) résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $x^5 - 26y = 19$

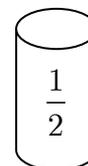
**Exercice 4 ( 5.5 pts )**

Soit  $n$  un entier naturel .

on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2}$

ن 0,5

soit  $(C_n)$  la courbe de  $f_n$  dans un repère orthonormé



1) a) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$  manti. ls.fr

- b) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_n)$  ن 0,25
- 2) a) montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$  puis calculer  $f'(x)$  ن 0,5
- b) dresser le tableau de variations de  $f_n$  ن 0,5
- 3) a) montrer que l'équation  $f_n(x) = 1$  admet dans  $]-\infty, 0[$  une seule solution  $x_n$  ن 0,5
- b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{Z} \geq 2) -1 < x_n < -\frac{1}{n}$  ن 0,5
- 4) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x_n) = e^{x_n}$  en déduire que  $(x_n)_n$  est convergente ن 0.75
- b) prouver que  $(\forall n \geq 2) x_n \geq -\frac{2 \ln n}{n}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n$  ن 1
- 5) tracer la courbe  $(C_1)$  ن 0,5

**Exercice 5 ( 5.75 pts )**

Partie (1)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$  ;  $x > 0$  et  $f(0) = 0$  ن 0,5

- 1) montrer que  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$  ن 0,5
- 2) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$  ن 0,5
- 3) calculer  $f'(x)$  et étudier le sens de variations de  $f$  puis dresser le tableau de variations ن 0,5
- 4) tracer la courbe  $(C_f)$  ن 0,5

Partie (2) on considère la fonction  $F$  définie sur  $]1, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^{\frac{1}{\ln x}} f(t) dt$  ن 0.75

- 1) montrer que  $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$  ن 0,5
- 2) calculer  $F(e)$  en déduire le signe de  $F(x)$  ن 0,5
- 3) a) prouver que  $(\forall x > 1) F(x) = \int_x^e \frac{1}{t^2 \ln t} dt$  ن 0,75
- b) montrer que  $(\forall t > 1) \ln t \leq t - 1$  en déduire  $(\forall x \in ]1, e[) F(x) \geq \int_x^e \frac{1}{e^2 (t-1)} dt$  ن 0,5
- c) calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} F(x)$  ن 0,25
- 4) a) vérifier que  $(\forall x > e) \frac{1}{t^2 \ln t} \leq \frac{1}{t^2}$  ن 0,5
- b) soit  $l$  la limite de  $F$  en  $+\infty$ , montrer que  $-\frac{1}{e} < l < 0$  et donner le tableau de  $F$

