2012-2013

Exercice (1)

On rappel que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ est un espace vectoriel réel et $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire .

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ on pose $J=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

1) a) montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif

b) montrer que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel puis déterminer sa dimension

2) calculer J^2 et J^n puis déterminer les coordonnées de $I+J+J^2+\dots+J^n$ dans la base (I,J)

3) soit f l'application de E vers $\mathbb{C}$ telle que : $(\forall M(x,y)\in E)\quad f(M)=x+iy\sqrt{2}$

a) montrer que f est un isomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$

b) déduire la structure de $(E,+,\times)$

4) on pose $A=M\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ déterminer A^n en fonction de I et J

Exercice (2)

(I) Soit m un nombre complexe . on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E)\quad Z^2-(2m+5i)Z+2m^2+(1+i)m-2(5+i)=0$$

1) a) vérifier que $\Delta=(2im+4+i)^2$

b) résoudre l'équation (E)

2) déterminer m pour que les solutions de (E) soient confondues et donner cette solution w

(II) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. on considère les points $M(m)$;

$M'(Z'=(1+i)m+2+3i)$ et $M''(Z''=(1-i)m-2+2i)$

1) a) montrer que : $\left(M\ ,\ M'\ et\ M''\ alignés\right)\Leftrightarrow\left(\ \mathrm{Im}(m)=2\ \right)$

b) déduire l'ensemble des points $M'(Z')$ pour que M , M' , M'' soient alignés

2) soit S l'application du plan qui associer M au point M' et S' qui transforme M au point M''

a) montrer que S est le composé d'une homothétie et une rotation en donnant leurs éléments caractéristiques

b) montrer que $S'\circ S$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport

3) soit f l'application qui lie M' au point M''

a) montrer que f est une rotation en donnant l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle

b) soit I le milieu du $[M'M'']$ et T l'application qui transforme M en I .

monter que T est une translation et déterminer son vecteur

c) on suppose que $M'\neq\Omega$. montrer que (ΩI) et $(M'M'')$ sont perpendiculaire

exercice (3)

1) montrer par récurrence que $(\forall n \geq 3) \quad 2^{n-1} > n$

2) on considère dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $(I) \quad x^{n-1} = n$

a) résoudre (I) pour $n = 1$ et pour $n = 2$

b) déterminer l'ensemble des solutions pour $n \geq 3$

3) on considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation $(E) \quad a^b = b^a$

a) soit p un entier naturel premier . montrer que : $p \mid a \Leftrightarrow p \mid b$

b) on suppose $a \neq b$ et soit p un diviseur premier de a et de b

(i) α l'exposant de p dans la décomposition en nombre premier de a et β celle de p dans la décomposition en nombre premier de b . montrer que $\alpha b = \beta a$

(ii) montrer que $b \mid a \; ou \; a \mid b$

(iii) on suppose que $a \mid b$ déterminer les solutions de l'équation (E)

Exercice (4)

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} dt$

1) a) montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $G'(x)$

b) montrer que G est impaire

2) a) montrer que $(\forall t \geq 0) \quad \frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

b) déduire $\lim_{x \to +\infty} G(x)$

3) a) montrer que $(\forall t \geq 1) \quad 1 + 4t^2 \geq (1+t)^2$

b) déduire que $(\forall x > 1) \quad G(x) \leq G(1) - \ln 4 + 2\ln(x+1)$

c) étudier la branche infinie de la courbe (Γ_G) au voisinage de $+\infty$

4) a) montrer que G est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

b) soit F la réciproque de G .

montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4F^2(x)}$

c) montrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F''(x) - F(x) = 0$

d) calculer $F'(0)$; $F(0)$ puis déterminer $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x

exercice (5)

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 .

on définie la fonction f_n sur $]1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x-1) + P_n(x)$ avec $P_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$

1) a) étudier le sens de variation de P_n sur $]1,+\infty[$

b) étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ sur $]1,+\infty[$

c) montrer que $(\forall x \in]1,+\infty[)$ $f_n'(x)=\dfrac{x^n}{x-1}$ et donner le tableau de variation de f_n

2) a) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seul solution b_n

b) montrer que la suite $(b_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) tracer la courbe (C_2) on donne $1<b_2<1,2$

4) soit p un entier de $\mathbb{N}^*$.

a) montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$ $\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{p}$

b) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $\ln(n+1) \leq P_n(1)$

c) déduire que $(\forall n \geq 2)$ $f_n\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)>0$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$

5) a) étudier le sens de variation de f_{n+1}' sur l'intervalle $\left]1,1+\dfrac{1}{n+1}\right[$

b) en utilisant le théorème des accroissements finies à f_{n+1} sur $[b_{n+1},b_n]$ montrer que :

$$b_{n+1}-1 \leq (n+1)(b_n-b_{n+1}) \leq b_n-1$$

c) déduire un encadrement du nombre b_3