Problème d'analyse

Soit n un entier naturel . on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$

Partie (1) On suppose $n = 1$

1) a) calculer les limites $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)$; $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ interpréter les résultats

b) montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$ que peut-on déduire ?

2) calculer $f_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ puis donner le tableau de variations

3) a) soit h la restriction de f sur $I =]0,2]$. Montrer que h est bijective de I vers un intervalle J à déterminer

b) calculer $f_1(1)$ et montrer que h^{-1} est dérivable en $a = e-1$ et déterminer $(h^{-1})'(e-1)$

4) tracer la courbe de f_1

Partie (2)

1) a) étudier le sens de variation de f_n sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

b) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n dans $]-\infty,0[$

2) a) étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $]-\infty,0[$

b) déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1})

3) a) montrer que $(\alpha_n)_n$ est croissante et convergente

b) déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_n$

4) On pose $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\alpha_k^2}{k^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. montrer que $(s_n)_n$ est croissante et convergente

(on Remarque que $(\forall k \geq 2)$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$)

Partie (3)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x\int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2}dt$; $x \neq 0$ et $F(0) = \frac{1}{2}$

1) a) montrer que $(\forall x > 0)$ $\frac{1}{2}e^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^{2x}$ et $(\forall x < 0)$ $\frac{1}{2}e^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^x$

b) déduire que F est continue en $x_0 = 0$

2) a) calculer les limites $\lim_{x\to-\infty} F(x)$; $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

b) étudier la branche infinie de la courbe de F en $+\infty$

3) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ F(x) = e^x - \dfrac{e^{2x}}{x} + x\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$

b) montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ F'(x) = x\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$

4) a) montrer que $(\forall x > 0)\ e^x \ln 2 \le \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \le e^{2x}\ln 2$ et $(\forall x < 0)\ e^{2x}\ln 2 \le \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \le e^x \ln 2$

b) déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$

5) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ F(x) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{(e^x-1)^2}{2} + x\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$

en déduire que F est dérivable en $x_0 = 0$

b) dresser le tableau de variations de F

exercice

Partie(A) soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1) calculer les limites $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) a) calculer la dérivée $g'(x)$ et étudier le sens de variation de g

b) donner le tableau de variations de g

3) a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α و et $\alpha \in]1,2[$

b) en déduire le signe de $g(x)$

Partie (B) on considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x(x+1)}$

1) calculer les limites $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) calculer la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f

4) vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ puis tracer la courbe (C_f)

(on prend $\alpha \simeq 1,84$ et $f(\alpha) \simeq 0,23$)