Se préparer au BAC

EXERCICE 1

Le plan complexe (P) est muni d' repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on considère les points A , B et C d'affixes respectivement $a = 8$ $b = 6j$ et $c = 8j^2$. A' est l'image du point B par la rotation r_1 de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$; B' est l'image du point C par la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et C' l'image de A par la rotation r_3 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) montrer que a' l'affixe de A' est un nombre réel

b) montrer que l'affixe de B' est $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis vérifier que $O \in (BB')$

c) montrer que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$ est l'affixe du point C'

d) montrer que les droites (AA') ; (BB') et (CC') se coupent en O

2) a) calculer $OA + OB + OC$

b) soit M un point du plan (P) d'affixe z. Prouver que $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| = 22$

c) déduire que $MA + MB + MC$ est minimale si $M = O$

PROBLÈME D'ANALYSE

PARTIE (I)

1) On pose $h(x) = \frac{1}{x} + 2\ln x$

Calculer $h'(x)$ dresser le tableau de variations h en déduire que $(\forall x > 0)$ $h(x) > 0$

2) on considère la fonction : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - (\ln x)^2$

a) montrer que $(\forall x > 0)$ $g'(x) = -\frac{1}{x}h(x)$ en déduire les variations de g

b) montrer que $(\forall x > 1)$ $g(x) < 0$ et $(\forall x \in]0,1[)$ $g(x) > 0$

(on remarque que $g(1) = 0$)

PARTIE (II)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=(1-x)e^{-\frac{1}{\ln x}} & ; \quad x\neq 0 \;;\; x\neq 1 \\ f(0)=1 \quad ; & f(1)=0 \end{cases}$

et (C) la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) montrer que f est continue à droite de $x_0=0$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

2) a) montrer que f est continue à droite de $x_1=1$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_1=1$

c) la fonction f est-elle continue en $x_1=1$?

3) étudier la branche infinie de (C) en $+\infty$

4) a) montrer que $(\forall x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,)\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{(\ln x)^2}e^{-\frac{1}{\ln x}}$

b) dresser le tableau de variations de f

5) tracer la courbe (C)

PARTIE (III) soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x-1} f(t)\,dt$

1) montrer que $(\forall x\geq 1)\quad (x-1)f(2x-1)\leq F(x)\leq (x-1)f(x)$

2) montrer que F est dérivable à droite de $a=1$

3) a) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

b) donner une interprétation graphique des résultats

4) a) montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$

b) montrer que F est décroissante sur $]1,+\infty[$ et donner le tableau de variations

5) tracer la courbe de F