2016-15 4h	Groupe Scolaire Gauss Maternelle · Primaire · Collège · Lycée	$2^{ème}$ BAC SM

EXERCICE 1

Partie (1) soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=-x^2+1-\ln x$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$

2) a) montrer que $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad : \quad g'(x)=-\dfrac{1+2x^2}{x}$

b) étudier le sens de variation de g et donner le tableau de variations

3) a) montrer que 1 est l'unique solution de $g(x)=0$

b) déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

partie (2) on considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=-x+2+\dfrac{\ln x}{x}$

1) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ interpréter les résultats

2) a) montrer que (C_f) admet en $+\infty$ une asymptote (Δ) dont précisera l'équation

b) étudier la position de (C_f) et (Δ)

3) a) montrer que $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad : \quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b) déduire les variations de f puis dresser le tableau de variations

4) montrer que $f(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ deux solutions α et β telles que $0<\alpha<1<\beta$

5) tracer (C_f) (on donne $0,4<\alpha<0,5$; $2,3<\beta<2,4$)

Partie(3 h est la fonction définie par : $h(x)=1+\sqrt{1+\ln x}$

1) a) déterminer le domaine de h

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$

2) montrer que $h'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$ et étudier les variations de h

3) montrer que $h([1,e])\subseteq[1,e]$

4) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=h(U_n)$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le U_n\le e$

b) montrer par récurrence que $(U_n)_n$ est croissante

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\beta$

EXERCICE 2

1) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que

$(\forall x\in\,]0,+\infty[)\ \ln(1+x)\le x\le(x+1)\ln(1+x)$

2) a) prouver que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\le e^n\le\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire que $(\forall n\ge 2)\quad \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\le\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n+1}$

c) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

EXERCICE 3

Soit g l'application définie de $\mathbb{C}-\{1-i\}$ vers $\mathbb{C}-\{1-i\}$ par :

$$(\forall Z\in\mathbb{C}-\{1-i\})\quad g(Z)=\frac{(1-i)Z}{Z-1+i}$$

1) a) déterminer les deux racines carrées du nombre $3-4i$

b) résoudre dans $\mathbb{C}-\{1-i\}$ l'équation $g(Z)=Z+2+i$

2) a) montrer que $(\forall Z\in\mathbb{C}-\{1-i\})\ \left(\overline{g(Z)}=g(Z)\right)\Leftrightarrow\left(|Z+i|=1\right)$

b) en déduire l'ensemble des points $M(Z)$ tel que $g(Z)$ réel

3) soit Z un nombre de $\mathbb{C}-\{1-i\}$ et on pose $Z-1+i=e^{i\theta}$ où $\theta\in[0,\pi[$

a) déterminer en fonction de θ $\arg\left(g(Z)-1+i\right)$ et $\left|g(Z)-1+i\right|$

b) sachant que $g(Z)-1+i=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

déterminer l'écriture exponentielle du nombre $Z-1+i$ déduire Z

EXERCICE 4

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

1) Montrer que $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\ F'(x)=\arctan x$

2) on considère les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ telles que :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\quad \text{et}\quad v_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n}\arctan^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

a) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

b) en appliquant le théorème des accroissements finis à F sur $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$

montrer que : $u_n-\frac{\pi}{4n}\leq\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\leq u_n$

c) en déduire la limite de $(u_n)_{n>0}$

2) soit la suite $(S_n)_{n>0}$ définie par : $S_n=\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+\frac{1}{n}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

a) montrer que $(\forall x\geq 0)\quad x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

b) en déduire que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ u_n-\frac{1}{2}v_n\leq\ln S_n\leq u_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

FIN

الله ولي التوفيق