EXERCICE 1

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$

Partie (A) On considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = x^2 - n + n\ln x$

1) a) calculer les limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g_n(x)$

b) calculer la dérivée $g_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de g_n

2) a) montrer que $g_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n et $1 \le \alpha_n < e$ puis déterminer α_1

b) en déduire le signe de $g_n(x)$

3) a) vérifier que $g_{n+1}(\alpha_n) = -1 + \ln\alpha_n$ en déduire que $(\alpha_n)_n$ est croissante

b) montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\dfrac{1}{n} \le 1 - \ln\alpha_n \le \dfrac{e^2}{n}$ puis déduire La limite de $(\alpha_n)_n$

Partie (B) Soit f_n la fonction définie par :

$f_n(x) = x - n - n\dfrac{\ln x}{x}$

1) a) calculer les limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)$

b) montrer que la droite (Δ_n) $y = x - n$ est une asymptote à la courbe (C_n)

2) étudier le sens de variation de f_n et donner le tableau de variations

3) on pose $h(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

a) étudier les variations de h puis montrer que $h(x) = 0$ admet une seule solution β et $\dfrac{1}{e} \le \beta \le 1$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $f_n(\beta) = \beta$

c) étudier la position des courbes (C_n) et (C_{n+1})

4) tracer dans un même repère les courbes (C_2) ; (C_1) (on prend $\alpha_2 \simeq 1{,}25$; $f_2(\alpha_2) \simeq -1{,}2$ et $\beta \simeq 0{,}57$)

Partie (C)

1) montrer que β est l'unique solution de l'équation $e^{-x} = x$

2) on considère la suite $(U_n)_n$ telle que :

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = e^{-U_n}$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\dfrac{1}{e} \le U_n \le 1$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|U_{n+1} - \beta| \le e^{\frac{-1}{e}} |U_n - \beta|$

c) en déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE 2

Soit a un réel de $\mathbb{R}^{+*}$. on considère la suite

$U_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{a+k}$ et on pose $f(x) = \ln(x+a)$

1) soit k un élément de $\{0,1,\dots,n-1\}$

En utilisant le théorème des accroissement finis

Montrer que :

$$\frac{1}{a+k+1} \le f(k+1) - f(k) \le \frac{1}{a+k}$$

2) prouver que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\ln\left(1 + \dfrac{n}{a}\right) \le U_n \le \dfrac{1}{a} + \ln\left(1 + \dfrac{n}{a}\right)$

3) en déduire les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U}{n}$