Exercice 1

Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$: بما يلي par : $f_n(x)=2x-2+\frac{\ln(x^2+1)}{n}$

1) a) calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $+\infty$

2) calculer $f_n'(x)$ étudier le sens de variation de f_n et donner le tableau de variation de f_n

3) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution α_n et $0<\alpha_n<1$

4) tracer la courbe (C_1) (on prend $\alpha_1 \simeq 0,77$)

5) a) montrer que $f_n(\alpha_{n+1})>0$ puis montrer que $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est croissante et convergente

b) prouver que $1-\alpha_n \leq \frac{\ln(2)}{2n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

Exercice 2

Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{1}{x}+n\ln x$

1) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x)$

2) calculer la dérivée $f_n'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n

3) a) étudier la position des deux courbes (C_n) et (C_{n+1})

b) tracer les courbes (C_3) et (C_4) dans un même repère

4) a) montrer que $f_n(x)=0$ admet deux solutions V_n *et* U_n tels que $0<U_n<\frac{1}{n}<V_n\leq1$

Puis calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

b) étudier la monotonie de la suite $(V_n)_n$ en déduire qu'elle est convergente

5) exprimer $\ln V_n$ en fonction de V_n et n en déduire la limite de $(V_n)_n$

Exercice 3

soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x)=e^{-x}-x^{2n+1}$

1) calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) calculer la dérivée $f_n'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n

3) montrer que $f_n(x)=0$ admet une seule solution a_n et $a_n<1$

4) étudier la position des courbes de fonctions f_{n+1} *et* f_n en déduire que $(a_n)_n$ est croissante

5) prouver que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\ln a_n = \frac{-a_n}{2n+1}$ en déduire la limite de la suite $(a_n)_n$