Exercie 1

On considère la suite $\left(U_n\right)_n$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

1) en utilisant le théorème des accroissement finies montrer que :

$$\left(\forall k \in \mathbb{N}\right) \quad \frac{n}{n^2+\left(k+1\right)^2} \leq \arctan\frac{k+1}{n} - \arctan\frac{k}{n} \leq \frac{n}{n^2+k^2}$$

2) en déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\arctan\frac{n+1}{n} - \arctan\frac{1}{n} \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$

3) montrer que $\left(U_n\right)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercie 2

Soit $\left(U_n\right)_n$ la suite définie par : $U_n = -\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(n+k\right)$. on pose $f\left(x\right) = \ln x$

1) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln a_k$ avec $a_k = 1 + \frac{k}{n}$

2) a) montrer que $\left(\forall k \in \left\{0,1,\dots,n-1\right\}\right)$ $\frac{1}{n}f\left(a_k\right) \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\left(x\right)dx \leq \frac{1}{n}f\left(a_{k+1}\right)$

b) en déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $U_n - \frac{\ln 2}{n} \leq \int_1^2 f\left(x\right)dx \leq U_n$

3) a l'aide d'une intégration par partie montrer que $I = \int_1^2 f\left(x\right)dx = 2\ln 2 - 1$

4) déduire que $\left(U_n\right)_n$ est convergente et déterminer sa limite

5) on pose $W_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$. montrer que $\lim_{w\to+\infty} W_w = \frac{4}{e}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f\left(x\right) = \left(x+1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

1) a) étudier la branche infinie de $\left(C\right)$ au voisinage de $+\infty$

b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation

2) étudier la concavité de $\left(C\right)$ puis tracer la courbe

3) montrer que $\left(\forall x \in \left[0,+\infty\right[\right)$ $\left|f'\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{2}$

4) montrer que l'équation $f\left(x\right) = x$ admet une seule solution α et que $1 < \alpha < 2$

5) on considère la suite $\left(U_n\right)_n$ définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$

a) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $0 \leq U_n < 2$

b) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\left|U_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|U_n - \alpha\right|$

c) déduire que $\left(U_n\right)_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

Exercice 4

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x\ln x \quad ; \quad x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) a) montrer que f est continue sur $\left[0,+\infty\right[$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

2) a) étudier la branche infinie de (C)

b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation

3) tracer la courbe (C)

4) a) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution u_n et $u_n > 1$

b) étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq}$ et montrer que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \leq n$

5) déduire que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \geq \dfrac{n}{\ln n}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

6) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \leq \dfrac{n}{\ln n - \ln(\ln n)}$ puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n \ln n}{n} = 1$

Exercice 5

Partie (1) soit g la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x) = 2(x-1) - \ln x$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$

b) calculer $g'(x)$; étudier le sens de variation de g puis dresser le tableau de variation

2) a) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ une seule solution α

b) en déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(1) = 0$)

partie (2) soit la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(\ln x)^2}{x-1} & ; \quad x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$

1) montrer que f est continue sur $\left[0,+\infty\right[$

2) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$ et en $x_1 = 1$

b) donner l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C) au point $x_1 = 1$

3) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; interpréter géométriquement les résultats

4) calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation

5) on pose $\varphi(x) = f(x) - x + 1$ pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$

a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) \quad \varphi'(x) = -\left(\dfrac{\ln x}{x-1} - 1\right)^2$ et étudier la position de (C) et (Δ)

b) montrer que $f(\alpha) = 4\alpha^2 - 4\alpha$ et tracer (C) (on donne $\alpha \simeq 0,2$)