

Suite numériques

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique

b) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 4

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ on considère la

fonction f_n définie par : $f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$

1) montrer que f_n est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

2) en déduire que $f_n(x) = 0$ admet une seule

solution a_n et que $0 < a_n < 1$

3) montrer que

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

Puis étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) déduire que $(a_n)_n$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Exercice 5

Soit b un réel de \mathbb{R}^{*+} , a tel que $a > \sqrt[3]{b}$.

On considère la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0 = a \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{U_n} \right)$$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0$

b) montrer que

$$U_{n+1} - \sqrt[3]{b} = \frac{2U_n - \sqrt[3]{b}}{3U_n} (U_n - \sqrt[3]{b})$$

c) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \sqrt[3]{b}$

puis $(U_n)_n$ est convergente

2) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \sqrt[3]{b} \leq \frac{2}{3} (U_n - \sqrt[3]{b})$$

b) déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 6

1) a) montrer que $\left(\exists! \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\right) \quad \tan \alpha = \frac{1}{\alpha}$

b) montrer que $\alpha = \pi + \arctan \frac{1}{\alpha}$

2) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\exists! \beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\right) \quad \tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}$$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha < \beta_n$

c) étudier la monotonie de $(\beta_n)_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

Exercice 1

Soit a un réel de $]0, 1[$ on considère la suite

$$(U_n)_{n \geq 1} \text{ définie par : } U_n = \prod_{k=0}^{k=n} (1 + a^{2^k})$$

1) montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est croissante

2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}$

3) en déduire que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par :

$$U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n^2}$$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente

a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5} (1 - U_n)$$

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

2) on pose $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ pour tout n de \mathbb{N}^*

Montrer que $n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq \sum_{k=1}^{k=n} U_k \leq n$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice 3

$(U_n)_n$ une suite telle que :

$$U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \text{ et } U_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + U_n^3}{8}}$$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ puis

déduire la monotonie de $(U_n)_n$

2) on pose $V_n = \frac{7}{8} U_n^3 - \frac{1}{8}$

Suites numériques

Exercice 10

f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que $f(x) = x$ a une seule solution α et $1 < \alpha < 2$

2) Montrer que $(\forall x \in [1, 2]) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n)$$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Dédire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite

4) On pose $T_n = (-1)^n (U_n - \alpha)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}$

en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_n \geq 0$

b) Etudier la monotonie de $(S_n)_n$ et montrer qu'elle est majorée

Exercice 11

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_1 = 1$ et

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0$

En déduire que $(U_n)_n$ est croissante

2) on pose $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \sqrt{1 + V_n}$

c) déduire $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < \sqrt{3}$ puis que $(U_n)_n$ est convergente. on pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) a) montrer que $(\forall k > 3) \quad 2^k \geq k^2$

b) montrer que $(\forall k > 2) \quad U_{k+1}^2 - U_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}$

en déduire que $\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}$

Exercice 7

Soit n un entier de \mathbb{N} on considère f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan x - x$

1) étudier le sens de variation de f

2) montrer que $f(x) = n$ a une solution α_n

3) a) montrer que $(\alpha_n)_n$ est convergente

b) déterminer la limite de $(\alpha_n)_n$

Exercice 8

f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Par : $f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}$

1) a) étudier les variations de f

b) déduire que $f(x) = x$ a une unique solution

α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2) montrer que $(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $(U_n)_n$ la suite définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n)$$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

Exercice 9

$(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites telles que :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{3^k}$$

1) déterminer la limite de $(U_n)_n$

2) a) vérifier que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3V_{n+1} = U_n + V_n$$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 3$

c) montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite