

### Suites numériques

#### Exercice (1)

On considère la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

- Montrer que  $(\forall k \geq 2) \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$
- déduire que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est majorée

#### Exercice (2)

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  la suite telle que :  $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

- montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n \geq \frac{1}{2}$
- étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$
- montrer que  $(U_n)_{n \geq 1}$  est convergente

#### Exercice (3)

On considère la suite  $(x_n)_n$  définie par :  $x_0 = 1$  et  $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}$

- montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < x_n < 2$
- montrer que  $(x_n)_n$  est croissante puis qu'elle est convergente
- on pose  $U_n = x_n^3 - 2$  pour tout entier naturel  $n$   
montrer que  $(U_n)_n$  est géométrique et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

#### Exercice (4)

Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . on considère la fonction  $F_n$  définie sur  $]0,1[$

Par :  $F_n(x) = (1-x)(x+1)^n$

- étudier le sens de variation de  $F_n$
- montrer que l'équation  $F_n(x) = 1$  admet un unique solution  $x_n$

3) a) montrer que  $(\forall x \in ]0,1[) F_{n+1}(x) < F_n(x)$

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) x_{n+1} \in \left] \frac{n-1}{n+1}, 1 \right[$

c) déduire la monotonie de  $(x_n)_n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

#### Exercice (5)

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 3$ . on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$  et soit  $\alpha$  la solution positif de  $x^2 + x - 1 = 0$

- sans déterminer  $\alpha$  montrer que  $0 < \alpha < 1$
- montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}^+$  un unique solution notée  $U_n$
- montrer que  $(\forall n \geq 3) 0 < U_n < \alpha$
- montrer que  $(U_n)_n$  est croissante et convergente
- montrer que  $(\forall n \geq 3) U_n^n + (U_n - \alpha) \left( U_n + \frac{1}{\alpha} \right) = 0$  en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

#### Exercice(6)

soit  $a$  un réel et on considère la suite  $(U_n)_n$  telle que :

$U_0 = a - \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = U_n^2 + (1-2a)U_n + a^2$

$f$  : المعرفة بما يلي est la fonction définie par :  $f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2$

- vérifier que  $f(x) - a = (x-a)(x-a+1)$
  - déduire que  $f([a-1,1]) \subset [a-1,a]$
- montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq x$
- montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) a-1 < U_n < a$
  - étudier la monotonie de  $(U_n)_n$  en déduire qu'elle est convergente
  - déterminer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$