Feuilles d'exercices : corrigé

Exercice 1 (**)

1. Vrai, elle minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante.
2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme pair qui le précède, et pourtant elle dinverge vers $+\infty$.
4. L'énoncé n'était pas vraiment celui que je voulais mettre, mais c'est faux de toute façon.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 2 (* à **)

La correction de cet exercice est rédigée à l'aide d'équivalents, qui n'avaient pas encore été vus au moment où nous fait cet exercice en classe, mais c'est de toute façon une bonne idée de le reprendre avec le formalisme des équivalents.

- $2^n - 3^n + 4^n \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n + 4^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $2^n - e^{2n} + 1 \sim -e^{2n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - e^{2n} + 1 = -\infty$.
- $\dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} \sim \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n + e^{-3n} = +\infty$ (il n'y a même pas de forme indeterminée ici).
- $\dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2} \sim \dfrac{2\sqrt{n}}{-3n} \sim -\dfrac{2}{3\sqrt{n}}$, donc la limite vaut 0.
- $\sqrt{n^2 - 1} - n = \dfrac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - 1} - n = 0$.
- $\dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \sim \dfrac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = 0$, donc la limite recherchée est nulle.

Exercice 3 (**)

1. C'est une récurrence facile : $u_0 > 0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} > 0$, et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est également strictement positif (et bien défini puisque u_n n'est pas nul).
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est strictement croissante.

3. Notons P_n la propriété $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. pour $n = 0$, elle se réduit à $u_0^2 \geqslant u_0^2$, ce qui est manifestement vrai. Supposons donc, pour un certain entier n, que P_n est vrai. On a alors $u_{n+1}^2 = \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2u_n \times \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\dfrac{1}{u_n^2} > 0$, on obtient $u_{n+1}^2 > 2n + u_0^2 + 2 = 2(n+1) + u_0^2$, ce qui prouve exactement la propriété P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n.
   La suite (u_n^2) étant minorée par une suite arithmétique de limite $+\infty$, elle diverge vers $+\infty$. Et u_n étant toujours positif, on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (***)

Il est facile de minorer u_n par $n!$ (puisque u_n est constitué d'une somme de termes tous positifs dont l'un vaut $n!$), mais pour la majoration, il ne suffit pas de se contenter de majorer par $n+1$ fois le plus grand terme. Il vaut mieux isoler ce plus grand terme (donc $n!$), et même le deuxième, et majorer le reste : $u_n = n! + (n-1)! + \sum\limits_{k=0}^{k=n-2} k! \leqslant n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)!$ (puisqu'il reste $n-1$ termes dont le plus grand vaut $(n-2)!$). On obtient donc $\dfrac{n!}{n!} \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant \dfrac{n!}{n!} + \dfrac{(n-1)!}{n!} + \dfrac{(n-1)(n-2)!}{n!}$, soit $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$ (les deux derniers termes à droite sont en fait égaux). Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{n} = 1$, on peut conclure à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n!} = 1$. Autrement dit, on a en fait $\sum\limits_{k=0}^{k=n} k! \sim n!$.

Exercice 5 (***)

1. Mea culpa, cette question est beaucoup plus difficile que je ne le pensais au premier abord. On veut montrer, en passant à l'exponentielle, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\ln\left(1 + \dfrac{a}{n+1}\right) \geqslant n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$, ce qui découle du fait que la fonction $f : x \mapsto x \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x \ln \dfrac{x+a}{x} = x\ln(x+a) - x\ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \dfrac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{x+a-x}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \dfrac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$. La fonction f' est donc toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante (ouf...).
2. Le plus simple est de faire deux petites études de fonction : posons sur $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on noue demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $\ln(1+t) \leqslant t$ sur $\mathbb{R}_+$.
   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1+t-1}{(1+t)^2} = \dfrac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.

3. On a $\ln u_n = n \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \frac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $n \times \frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln u_n \leqslant n \times \frac{a}{n}$, qu'il suffit de simplifier pour obtenir le résultat demandé.
4. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{na}{n+a} = a$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.
5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e$.

Exercice 6 (*)

Le fait que u_n soit strictement positif pour $n \geqslant 1$ (légère coquille dans l'énoncé) est absolument évident. De plus, $u_n - 1 = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 = \frac{n^2+2n-(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$, donc $u_n < 1$. Le calcul de limite n'utilise absolument pas cet encadrement mais ne pose aucun problème : $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (**)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{2n+n^2-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Exercice 8 (**)

1. Le terme d'indice n de la suite est constitué d'une somme de n réels dont le plus petit est $\frac{n}{n^2+n}$ et le plus gros $\frac{n}{n^2+1}$. On en déduit que $n \times \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{n}{n^2+1}$, d'où l'encadrement demandé.
2. Les deux suites extrêmes ayant pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 9 (***)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \frac{(\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.

4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on a donc $l' = \dfrac{l + l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).
5. Évidemment, sans avoir vu les boucles WHILE et REPEAT, il est plus difficile de répondre à cette question. Vous pourrez revenir dessus très bientôt, voici en tout cas un programme qui effectue ce calcul :

```
PROGRAM arithmeticogeometrique ;
USES wincrt ;
VAR e,a,b,u,v,w : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les reels a et b') ;
ReadLn(a,b) ;
WriteLn('Choisissez la precision de la valeur approchee') ;
ReadLn(e) ;
u := a ; v := b ;
WHILE (v-u > e) DO
BEGIN
w := (u+v)/2 ;
u := sqrt(u*v) ;
v := w ;
END ;
WriteLn('La moyenne arithmético-géométrique de ',a,' et ',b,' vaut ',u,' à ',e,' près.') ;
END.
```

Exercice 10 (***)

1. Pour que la suite soit bien définie, il faut que u_n ne soit jamais égal à 1. C'est le cas pour u_0, mais il n'est pas facile de s'en sortir par récurrence ensuite. Constatons que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n^2 + 1 = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 - u_n + 2 = 0$, équation qui a un discriminant négatif et n'admet donc pas de solution. Autrement dit, on ne peut jamais tomber sur la valeur 1 avec cette relation de récurrence, et la suite est donc bien définie.
2. La fonction f admet pour dérivée $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 8$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[1-\sqrt{2}; 1[$ et sur $]1; 1+\sqrt{2}]$. Elle admet un maximum local en $1-\sqrt{2}$ qui vaut $\dfrac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}$; et un minimum local en $1+\sqrt{2}$ qui vaut $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2$.
3. On a $f(x) - x = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$, et on a vu plus haut que le numérateur ne s'annulait jamais, ce dont on déduit qu'il est toujours positif. Si $x < 1$, $f(x)$ est donc inférieur à x, et $f(x) > x$ si $x > 1$.

4. Une récurrence facile permet de prouver que $u_n \geqslant 2\sqrt{2}+2$ dès que $n \geqslant 1$. C'est vrai pour u_1 car $u_1 = f(u_0)$ et que la plus petite valeur prise par f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est $2\sqrt{2}+2$ (question 2). Si on suppose désormais $u_n \geqslant 2\sqrt{2}+2$, on a a fortiori $u_n > 1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 2\sqrt{2}+2$, ce qui achève la récurrence. Comme on a toujours $f(x) > x$ quand $x > 1$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n, et donc que la suite est strictement croissante. Si elle était convergente, sa limite l vérifierait $f(l) = l$, ce qui n'est pas possible puisque cette équation n'a pas de solution. La suite ne peut donc pas converger ; comme elle est croissante, cela signifie que (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.
5. Le principe est exactement le même : on prouve par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2 - 2\sqrt{2}$ (qui est négatif, donc très inférieur à 1), on en déduit que la suite est décroissante puisque $f(x) < x$ sur l'intervalle où se situent les valeurs de la suite, et enfin que la suite ne peut pas converger, donc diverge vers $-\infty$.