

Lois de composition interne

Exercice 1

Soit \perp la loi interne définie sur \mathbb{Z} par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) \quad x \perp y = x + y - 2$$

- 1) montrer que \perp est commutative ,
associative dans \mathbb{Z}
- 2) montrer que \perp admet un élément neutre
- 3) montrer que tout élément x de \mathbb{Z} admet
un symétrique dans \mathbb{Z}

Exercice 2

On pose $I =]1, +\infty[$.

On considère dans I la loi \perp telle que :

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad x \perp y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$$

- 1) montrer que \perp est interne dans I
- 2) a) étudier la commutativité de \perp
b) montrer que \perp est associative
- 3) montrer que \perp admet un élément neutre

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif ,

on pose $I =]a, +\infty[$.

On considère dans I la loi $*$ telle que :

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad x * y = (x - a)(y - a) + a$$

- 1) montrer que $*$ est interne dans I
- 2) a) étudier la commutativité de la loi $*$
b) montrer que $*$ est associative
- 3) montrer que $*$ admet un élément neutre
- 4) montrer que $J =]a + 1, +\infty[$ est stable
dans $(I, *)$

5) pour tout entier n tel que $n \geq 2$

$$\text{on pose } x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois } x}$$

Montrer que $(\forall n \geq 2) \quad x^{(n)} = (x - a)^n + a$

Exercice 4

On considère dans \mathbb{R} la loi interne T telle

$$\text{que : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad xTy = xy - x - y + 2$$

- 1) a) étudier la commutativité de T
b) la loi T est-elle associative ?
- 3) montrer que T admet un élément neutre
- 4) montrer que $I =]1, +\infty[$ est une partie
stable pour la loi T dans \mathbb{R}
- 5) montrer que tout x de I admet un
symétrique x' pour la loi T dans I

Exercice 5

On pose $E =]-1, 1[$.

On considère dans E la loi T telle que :

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad xTy = \frac{x + y}{1 + xy}$$

- 1) montrer que T est interne dans E
- 2) a) étudier la commutativité de T
b) montrer que T est associative
- 3) montrer que (E, T) est un groupe
commutatif