

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 2)

PROF: ATMANI NAJIB

2ème BAC SM

TD : NOMBRES COMPLEXES

Exercice1 : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 2i$ 2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Exercice2 : en utilisant la Formule de Moivre

1) montrer que : $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

2) montrer que : $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

3) montrer que : $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4 \theta$

Exercice4 : 1) Montrer que $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2) on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u + v$; u_1 et u_2

Exercice5 : 1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$

3) Montrer que : $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5 \theta$ b) $\cos^2 \theta \sin^3 \theta$

Exercice6 : Déterminer les racines carrées des

nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5$

2) $z_2 = -4$ 3) $z_3 = -3 + 4i$ 4) $z_4 = -5 - 12i$

Exercice7 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -12$ 2) $z_2 = \cos \alpha - 2$ 3) $z_3 = 4 - 2i$

4) $z_4 = -4 - 3i$

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suyvantes : 1) (E) : $z^2 - z + 2 = 0$

2) (E) : $z^2 - z - 2 = 0$

3) (E) : $z^2 - 2z + 1 = 0$

4) $(1+i)z^2 - (1+7i)z + 14 + 12i = 0$

Exercice9 : soit $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$P(z) = z^2 - 2z + 2$

1) calculer : $P(1-i)$

2) en déduire dans \mathbb{C} la résolution de l'équations

$P(z) = 0$

Exercice10 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suivantes : 1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

3) $(4\cos\theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin\theta = 0$ avec : $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice11 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations

suivantes : 1) $z^2 + 2z + 5 = 0$ 2) $2z^2 + 3iz + (1 - i) = 0$

3) $3iz^2 + (1 - 2i)z + 5i + 1 = 0$

Exercice12 : 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$z^2 - 8z + 17 = 0$

2) Soit $P(z) = z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i$

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels $a; b; c$ tels que :

$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 0$

Exercice13 :

Soit $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur comme racine.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Exercice 14: soit dans \mathbb{C} l'équation :

Soit (E) : $z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = 0$

1) Montrer que 2 est une solution de l'équation (E)

2) montrer que :

$z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Exercice 15: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2Z^2 - 2Z + 5 = 0$ 2) $3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$

Exercice16 : soit dans \mathbb{C} l'équation : (E)

$P(Z) = Z^3 - (16 - i)Z^2 + (89 - 16i)Z + 89i = 0$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un

imaginaire pur z_0 à déterminer

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Exercice17 : soit : $z = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2) en déduire : $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Exercice18 : déterminer Les racines 4ème de l'unité

Exercice19 : Ecrire sous les formes algébriques les racines 6ième de l'unité.

Exercice 20: Considérons l'équation : (E) :

$z^6 = \bar{z}$ 1) Montrer que si $z \neq 0$ et z solution de (E)

Alors $|z| = 1$

2- Résoudre l'équation (E)

Exercice 21 :

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

2) Ecrire les solutions sous leurs formes

algébriques et déterminer :

$\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice22 : 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$z^2 - \sqrt{3}iz - 1 - \sqrt{3}i = 0$

2) En déduire sous les formes trigonométriques et algébriques les solutions de l'équation :

$z^6 - \sqrt{3}iz^3 - 1 - \sqrt{3}i = 0$

Exercice23 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère les points : A ; B ; C d'affixe

respectivement $z_A = 3 + 5i$; $z_B = 3 - 5i$; $z_C = 7 + 3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la

translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4 - 2i$

1) montrer que : $z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u})

2) vérifier que le Point C est l'image de A par t_u

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation t_u

Exercice24:

1- Donner l'écriture complexe de la translation

$t_{\overline{AB}}$ qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du Point $C(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$

par la translation $t_{\overline{AB}}$.

Exercice25 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère les points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit

z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$ et de Rapport $k = 4$

1) montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega, k)$)

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega, k)$

Exercice 26:

1- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du point $C(-1+5i)$ par l'homothétie h .

Exercice27 : Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ; B d'affixe

respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Exercice 28: Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Exercice29 : Soit la rotation r de centre $\Omega(i)$ et transforme O en $O' \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Exercice30 :

1- Montrer qu'il existe une rotation R de centre $\Omega(3+i)$ qui transforme $A(2+4i)$ en $B(6+2i)$

2- Donner l'écriture complexe de la rotation R

3- Déterminer l'image de $C(-1+3i)$

Exercice 31: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Exercice 32 : Soit u un complexe non nul, et f la transformation plane qui transforme $M(z)$ en

$$M'(z') \text{ tel que : } z' = uz + i - \bar{u}$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivant : 1) $u = 1$ 2) $u = -3$

$$3) u = j \qquad 4) u = 4 - 4\sqrt{3}i$$

Exercice 33 : Dans le plan complexe direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point : A (i) et la

rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1

la rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Exercice 34 : soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que : $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

et soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T = t_{\overline{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

Exercice 35 : Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point : $A(2)$ et soit φ

une transformation qui transforme $M(z)$ en $M_2(z_2)$

tel que $z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et soit H

l'homothétie de centre $A(2)$ et de Rapport $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Et soit : $f = \varphi \circ H$

1) montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle

2) montrer que $f \circ H^{-1} = \varphi$

Exercice 36 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un complexe non nul ; Pour tout nombre

z de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, on pose : $f_a(z) = z' = \frac{az}{z-a}$

1. Montrer que :

$$f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$$

2. Soit z un élément de $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$

on pose : $|z-a| = r$ et $\arg(z-a) \equiv \theta [2\pi]$

a. Calculer $|f_a(z) - a|$ en fonction de r et $|a|$

b. Calculer $\arg(f_a(z) - a)$ en fonction de θ et r .

3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M(z)$ définis par :

$$(D) = \{M(z); \arg(z-a) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]\}$$

$$(C) = \{M(z); |f_a(z) - a| = 2\}$$

$$(E) = \{M(z); f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$$

a) Déterminer les ensembles (E) et (C) et montrer que (D) est une demi droite d'origine $A(a)$ privée de A et déterminer son équation cartésienne.

b) soit z_0 un élément de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, et $B(z_0)$

tel que $B \in (D) \cap (C)$; écrire $f_a(z_0)$ sous sa forme

algébrique puis déterminer z_0

c) Construire les ensembles (D) ; (C) et (E) .

4) Déterminer la représentation complexe de la rotation ρ de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$

5) Déterminer la représentation complexe de la translation t de vecteur \vec{u} d'affixe a .

6. Déterminer la transformation top et ses éléments caractéristiques.

Exercice 37 : soit z un nombre complexe non nul

$$\text{Montrer que : } |z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$$

Exercice 38 : soit a et b et c des nombres

complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$

et $a \neq c$ et $b \neq c$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 39 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\operatorname{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

Exercice40 : Soit

$$P(z) = (i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i$$

1) Montrer que l'équation $(E) : P(z) = 0$ admet un imaginaire pur z_0 unique comme solution

2) déterminer les nombres complexes $a; b; c$ tels

$$\text{que : } P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$$

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

Exercice41 : Soit dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$$

1) Montrer que l'équation $(E) : P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 à déterminer

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices Que l'on devient un mathématicien*

