

NOMBRES COMPLEXES

En déduire que $\arg(z_2) \equiv -\theta \pmod{2\pi}$

2) a) montrer que $\frac{z_1}{z_2} = (2 + \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$

b) déduire une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

3) montrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

5

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé

direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère dans (P) la

transformation f qui à tout point

$M(z)$; $z \neq 0$ associer le point $M'(z')$

Tel que $z' = \frac{z^2 - 4}{2z}$

1) a) vérifier que $\frac{z'+2i}{z'-2i} = \left(\frac{z+2i}{z-2i} \right)^2$

b) on considère $B(-2i)$; $A(2i)$ montrer que

$(\widehat{M'A, M'B}) \equiv 2(\widehat{MA, MB}) \pmod{2\pi}$

Et $\frac{M'A}{M'B} = \left(\frac{MA}{MB} \right)^2$

2) soit I d'affixe $-4-2i$

a) déterminer une mesure de $(\widehat{IA, IB})$ et $\frac{IA}{IB}$

b) déterminer et tracer $E = \left\{ M(z) / \frac{MA}{MB} = 2 \right\}$

c) déduire comment poser I' l'image de I

6

Le plan (P) est muni d'un repère

orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit θ de $]-\pi, \pi[$

on considère les points $A(1)$, $M(-e^{i\theta})$ et

$N(2 + e^{-i\theta})$

1) montrer que AMN est isocèle de sommet A

2) déterminer θ pour que AMN soit équilatéral

1

On considère le nombre $Z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$

On pose $\theta \equiv \arg(Z) \pmod{2\pi}$

1) montrer que $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ (sans déterminer θ)

2) a) montrer que $Z^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(1+i)$

b) déterminer la forme trigonométrique du nombre $u = 1+i$

c) en déduire $\tan \frac{\pi}{8}$

2

soit $Z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

et on pose $\theta \equiv \arg(Z) \pmod{2\pi}$

1) vérifier que $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ (sans déterminer θ)

2) a) montrer que $Z^2 = 2(\sqrt{3} + i)$

b) écrire $u = \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique

c) déduire que $\theta = \frac{\pi}{12}$

et calculer $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12}$

3

le plan (P) est muni d'un repère orthonormé

direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points

$A(-1)$ et $B(1)$; Soit $M'(Z')$ l'image du point

$M(z \neq 1)$ Par f tel que $Z' = \frac{z+1}{z-1}$

1) déterminer $C = \left\{ M(z) / Z' \in i\mathbb{R} \right\}$

2)a) montrer que

$(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}) \quad (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$

b) interpréter géométriquement le résultat

4

soient A ; B deux points d'ffixes

$z_1 = (\sqrt{3} + 2) + i$ et $z_2 = 1 + (\sqrt{3} - 2)i$

On pose $\theta \equiv \arg(z_1) \pmod{2\pi}$

1) a) montrer que $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

b) montrer que $z_1 z_2 = 4$

NOMBRES COMPLEXES

9 le plan (P) est muni d'un r.o.d (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout n de \mathbb{N} , on considère les points

$A_n(z_n)$ tels que $z_0 = 1$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z_n ; \text{ on pose } r_n = |z_n|$$

1) a) écrire $\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4}$ sous forme trigonométrique

b) montrer que $(r_n)_n$ est géométrique et

exprimer r_n en fonction de n

puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n$

2) a) déterminer z_n sous forme exponentielle

b) montrer que $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}

3) déterminer n pour que A_n appartienne à l'axe des ordonnées

10 le plan (P) est muni d'un r. o. d (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère $B(-1)$; $A(1)$ et f qui associer

$$M(z \neq 0) \text{ au point } M'(z' = -\frac{1}{z})$$

1) a) déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$

b) déduire que M, O et M' sont alignés

2) soit (C) le cercle de centre A et passe par O

On note $(C^*) = (C) - \{O\}$; soit M de (C^*)

a) montrer que $|z'| = |z' + 1|$ interpréter le résultat géométriquement

b) déduire une constriction du M' image du M

3) soit $M(z)$ du plan tel que z réel

On considère le point $M_1(\bar{z})$

a) déterminer $\arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)$ en fonction de

$$\left(\overline{M_1A}, \overline{M_1B}\right)$$

b) comparer $\left(\overline{M_1A}, \overline{M_1B}\right)$ et $\left(\overline{MA}, \overline{MB}\right)$

déduire que M, B, A et M' sont cocycliques

7 le plan (P) est muni d'un repère

orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les

points $A(i)$ et $B(-i)$ et soit f l'application qui

associer $M(z)$; $z \neq 0$ au point $M'(z' = z + \frac{1}{z})$

1) a) déterminer $f(A)$ et $f(B)$

b) montrer que $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

c) en déduire l'image de (AB) par f

2) on pose $z = e^{i\theta}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

a) montrer que $z' = 2 \cos \theta$

b) Déduire l'image du cercle $C(O, 1)$ par f

3) a) montrer que $OM \times MM' = 1$ et que $\overline{MM'}$ et $\overline{OM''}$ sont colinéaire de même sens $M''(\bar{z})$

b) montrer que si $M \in C(O, 1)$ alors $OMM'M''$ est un losange

8 le plan (P) est muni d'un repère

orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . on considère les

points $A(2i)$ et $B(i)$ et soit f l'application qui

fait associer $M(z)$; $z \neq i$ au point

$$M'(z' = \frac{iz + 2}{z - i})$$

1) déterminer les points invariants par f

2) a) montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

$$\text{Et } \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overline{BM}, \overline{AM}\right) \quad [2\pi]$$

b) déterminer $E = \{M(z) / |z'| = 1\}$

et $F = \{M(z) / z' \in i\mathbb{R}\}$

3) a) simplifier $(z' - i)(z - i)$

b) déduire l'image du $C(B, 1)$ par f