TD :Exercices: LIMITE ET CONTINUITE

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 1} f(x) = 6$

Exercice2 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Exercice3: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim_{x\to +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

3) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ 6) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Exercice4 : Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}\left(-3x^2 + x\right)$ et $g(x) = \dfrac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x) = \dfrac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Exercice5 : Considérons la fonction f définie

par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x-1}; si...x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par

$f(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $si\ x \neq 0$ et $x \neq 2$ et $f(2) = 1/2$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 2$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $si\ x \neq 0$ et $f(0) = 2$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; $si\ x \neq 3$ et $f(3) = 7$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 3$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $si\ x \neq 0$ et $f(0) = 1/2$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice10 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}; si...x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0 = 1$

Exercice11 : Considérons la fonction f définie

par : $f(x) = \dfrac{x}{2}E\left(\dfrac{3}{x}\right)$; $si\ x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$

(E désigne la partie entière)

1)Montrer que $\left|f(x) - \dfrac{3}{2}\right| \leq \dfrac{|x|}{2}$

2)f est-elle continue en $x_0 = 0$?

Exercice12 : Soit f définie sur **R** par :

$\begin{cases} f(x) = x^2; si...x \leq 0 \\ f(1) = 2 + x; si...x \succ 0 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice13 : Soit f définie par :

$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; si...x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-1}; si...x \succ 0 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f à droite et à gauche de $x_0 = 0$

Exercice14 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{7-3x}; si...x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}; si...x \succ 2 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0 = 2$

Exercice15 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x \neq 1$

Et : $f(1) = 2$

Etudier la la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice16 : Soit la fonction h définie par

$f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$ a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a = -2$

Exercice17 : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 18 : Soit la fonction h définie par

$h(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

Exercice 19 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $h(x) = \sqrt{x^2+x+3}$ 2) $g(x) = \dfrac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$

3) $t(x) = \tan x$

Exercice 20 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$

2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$ 3) $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

Exercice 21 : Soit f et g deux fonctions définies par : $\begin{cases} f(x) = x+1; si...x \prec 0 \\ f(x) = 0; si...x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x) = 5$

Montrer que f est n'est pas continue en $x_0 = 0$ et $h = g \circ f$ est continue en $x_0 = 0$

Exercice 22 : Déterminer les limites suivantes :

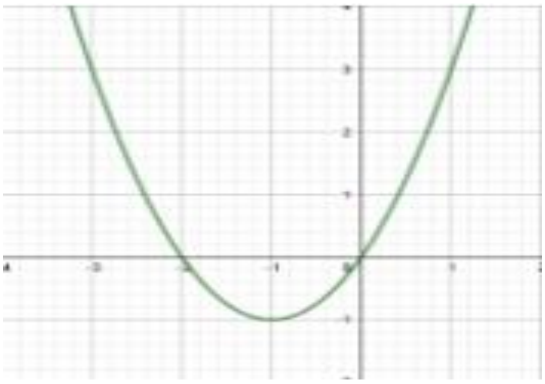
1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

Exercice23 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$

Exercice24 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2+2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1,2]$, $[0,2[$; $]-1,0]$

$[2,+\infty[$; $]-\infty,1]$

Exercice25 : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ Déterminer les images des intervalles suivants :

$[0,1]$; $[-2,-1[$; $]-1, 1]$; $[2, +\infty[$

Exercice26 : Montrer que l'équation :

$4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exercice27 : Montrer que l'équation :

$x^3+x+1=0$

Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Exercice28 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$I=[0;\pi]$

Exercice29 : Montrer que l'équation : $1+\sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice30 : on considère la fonction : f tel que

$f(x)=x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0;1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice31 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I=]-2;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Exercice32 : Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repére orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

Exercice33 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5=32$ **2)** $x^7=-128$ **3)** $x^4=3$ **4)** $x^6=-8$

Exercice34 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D=\sqrt[6]{\frac{2^5\times 128000000}{27^2}}$

7) $E=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F=\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Exercice35 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Exercice36 :résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Exercice37 :calcules les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Exercice38 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Exercice39 :1) Rendre le dénominateur rationnel : $a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$ $d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Exercice40 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$$

Exercice41: 1)simplifier les expressions suivantes : $A=\dfrac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\dfrac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Exercice 42:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^4=16$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-1)^3=-27$

Exercice 43 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt[3]{x}-x=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-2}\succ 1$

Exercice 44 : Déterminer les réels suivants :

1)$a = Arctan\left(tan\left(\dfrac{2007\pi}{5}\right)\right)$

2)$b = tan\left(Arctan\left(\dfrac{2007\pi}{5}\right)\right)$

3)$c = tan(Arctan(-1))$

4)d = $Arctan\left(tan\,(-1)\right)$

5)e = $tan(Arctan\sqrt{123})$

Exercice 45 : on considère les nombres suivants : $a = Arctan\dfrac{1}{2}$ et b = $Arctan\dfrac{1}{5}$

et c = $\dfrac{\pi}{4}-Arctan\dfrac{1}{8}$

1)montrer que : tan (a+b)= tan c

2)En déduire que :

$$Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}+Arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

Exercice46 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0=0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Exercice 47: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0=2$

2)Etudier la continuité de f en $x_1=\sqrt{2}$

3) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

Exercice48 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$;Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Exercice 49: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des nombres de l'intervalle $[a;b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Exercice50 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ tels que :

$$0\prec g(x)\prec f(x)\quad \forall x\in[a;b]$$

Montrer que :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*\,/\,\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$$

Exercice 51: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(a)\prec 0$

il existe $x_0\in]a;b[$ tel que : $f(x_0)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien