Exercices avec solutions : Limite et continuité
Exercices d'applications et de réflexions

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM BIOF

Exercices avec solutions : LIMITE ET CONTINUITE

Exercice1 : Soit la fonction : $f: x \mapsto 2x^2+3x+1$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 1} f(x)=6$

Solution : Montrons que :

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha > 0)(\forall x\in D_f)(0<|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$?

Soit : $I = \left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[= \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$

$x\in\left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[$ donc

$|f(x)-6|=|2x^2+3x-5|=|x-1||2x+5|$

$x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}$

$x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$ donc : $6\prec 2x+5\prec 8$

donc : $|2x+5|\prec 8$ donc : $|2x+5||x-1|\le 8|x-1|$

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche $\alpha > 0$ tel que :

$0<|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$

Pour avoir $\Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $8|x-1|\prec\varepsilon$

et $|x-1|\prec\frac{1}{2}$ cad $|x-1|\prec\frac{\varepsilon}{8}$ et $|x-1|\prec\frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{8}$ et $\frac{1}{2}$ cad $\alpha=\inf\left(\frac{\varepsilon}{8};\frac{1}{2}\right)$

donc : $\lim_{x\to 1} f(x)=6$

Exercice2 : Soit la fonction $f: x\mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution :

Déterminons $\lim_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec 1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} -\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec -1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}}\frac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=0$ donc : $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

Exercice3: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solutions : 1) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}=\frac{3}{1}=3$

2) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^4}{14x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{2x^6}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$

5) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$

donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times1=2$$

Exercice4 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to2}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim_{x\to3}g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to0}h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim_{x\to2}f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim_{x\to2}2x+1=5$ et $\lim_{x\to2}-3x^2+x=-10$

Donc : $\lim_{x\to2}f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim_{x\to+\infty}2x+1=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty}-3x^2+x=\lim_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

• 2) $\lim_{x\to+\infty}g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

• 2) $\lim_{x\to3}g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to3}\sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to3}-2x^2+1=-17$ et

$\lim_{x\to3}(x-3)^2=0^+$ donc : $\lim_{x\to3}g(x)=-\infty$

3) $\lim_{x\to0}h(x)$?.

$\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$

Or $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim_{x\to0}x^2+1=1$ et

$\lim_{x\to0}x^2=0^+$

et $\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim_{x\to0}h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

• $\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0$

• $\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$

• $\lim_{x\to0}-3x+1=1$ et $\lim_{x\to0}x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $\lim_{x\to0^+}x^2-2x=0^-$ et $\lim_{x\to0^-}x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim_{x\to0^+}k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to0^-}k(x)=+\infty$

$\lim_{x\to2}-3x+1=-5$ et $\lim_{x\to2^+}x^2-2x=0^+$ et $\lim_{x\to2^-}x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim_{x\to2^+}k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to2^-}k(x)=+\infty$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie

par : $\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-1};si...x\neq1\\ f(1)=-4\end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=1$

Solution :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-5)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x-5=-4$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

donc f est continue en $x_0=1$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $si\ x\neq 0$ et $x\neq 2$ et $f(2)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}=f(2)$ Alors :

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ Donc :f est continue en $x_0=2$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution : $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$ donc :

$|f(x)-2|=x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq x^2$ et on a $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2=f(0)$

Donc :f est continue en $x_0=0$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}$; $si\ x\neq 3$ et $f(3)=7$

Etudier la est continuité de f en $x_0=3$

Solution : on a : $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}=x+4$ D.EC

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} x+4=7=f(3)$

Alors : $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Donc :f est continue en $x_0=3$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=\frac{1}{2}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=1\times\frac{1}{2}=f(0)$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Donc :f est continue en $x_0=0$

Exercice10 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x-1};si...x\neq 1 \\ f(1)=m \end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0=1$

Solution : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

on pose : $h=x-1$ $x\to 1\Leftrightarrow h\to 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(\pi(h+1))}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(\pi h+\pi)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-\sin(\pi h)}{\pi h}\pi=-\pi$

donc f est continue en $x_0=1$ ssi $m=-\pi$

Exercice11 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\frac{x}{2}E\left(\frac{3}{x}\right)$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=\frac{1}{2}$

(E désigne la partie entière)

1)Montrer que $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{|x|}{2}$

2)f est-elle continue en $x_0=0$?

Solution :1) on a : $x-1\prec E(x)\leq x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\frac{3}{x}-1\prec E\left(\frac{3}{x}\right)\leq\frac{3}{x}$

SI $x\succ 0$: $\frac{x}{2}\left(\frac{3}{x}-1\right)\prec\frac{x}{2}E\left(\frac{3}{x}\right)\leq\frac{x}{2}\times\frac{3}{x}$

Cad : $\frac{3}{2}-\frac{x}{2}\prec f(x)\leq\frac{3}{2}$

donc :$-\frac{x}{2}\prec f(x)-\frac{3}{2}\leq 0$

donc : $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \le \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

SI $x \prec 0$: $\frac{x}{2}\times\frac{3}{x} \le \frac{x}{2}E\left(\frac{3}{x}\right) \prec \frac{x}{2}\left(\frac{3}{x}-1\right)$

Cad : $\frac{3}{2} \le f(x) \prec \frac{3}{2}-\frac{x}{2}$

donc : $0 \le f(x)-\frac{3}{2} \prec -\frac{x}{2}$

donc : $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \le \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*$

finalement : $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \le \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

2) on a $\left|f(x)-\frac{3}{2}\right| \le \frac{|x|}{2}$ et on a $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2}=0$

Donc : $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2} \ne f(0)$

Donc : f est discontinue en $x_0=0$

Exercice12 : Soit f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2; si...x \le 0 \\ f(1)=2+x; si...x \succ 0 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Solution : $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0=f(0)$

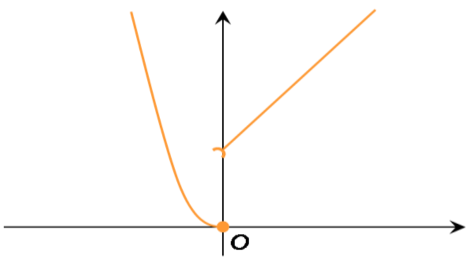
donc f est continue à gauche de $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2+x=2 \ne f(0)$

donc f n'est pas continue à droite de 0

Et on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.
f est discontinue en 0



Graphiquement : La courbe de f ne peut être tracée sur un intervalle comprenant 0, « sans lever le crayon ».

Exercice13 : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=3-x^2; si...x \le 0 \\ f(x)=\frac{x^2-3}{2x-1}; si...x \succ 0 \end{cases}$$

Etudier la est continuité de f à droite et à gauche de $x_0=0$

Solution : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-3}{2x-1}=3=f(0)$

donc f est continue à droite de $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 3-x^2=3=f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0=0$

Exercice14 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+1}{7-3x}; si...x \le 2 \\ f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}; si...x \succ 2 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Solution : on a : $f(2)=\frac{2\times 2+1}{7-3\times 2}=\frac{5}{7-3\times 2}=5$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x+3=5=f(2)$

Donc f est continue adroite de f en $x_0=2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+1}{7-3x}=\frac{5}{1}=5=f(2)$

Donc f est continue gauche en $x_0=2$

Donc f est continue en $x_0=2$

Exercice15 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x \ne 1$

Et : $f(1)=2$

Etudier la la continuité de f en $x_0=1$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\succ 1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\succ 1}}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\succ 1}} x+1=2=f(1)$

donc f est continue à droite de $x_0=1$

$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\prec 1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\prec 1}}-\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\succ 1}}-(x+1)=-2 \ne f(1)$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0=1$

donc f n'est pas continue en $x_0=1$

donc f est discontinue en $x_0=1$

Exercice16 : Soit la fonction h définie par

$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim_{x\to -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$ a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en a = −2

Solution : 1)

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1;-2\}$

2) $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x+2} = 3$

$-1 \notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0 = -1$

3) a) $\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

b) $\lim_{x\to -1} f(x) = 3 = f(-1)$

donc f est continue en $x_0 = -1$

4) $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$?

$\lim_{x\to -2^+} x^3 + 1 = -7$

$\lim_{x\to -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^-$ donc : $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

Donc on ne peut pas prolonger f par continuité en a = −2

Exercice17 : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Solution : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times x = 0$

Car : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Donc La fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ Est une prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 18 : Soit la fonction h définie par

$h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)}$ (E désigne la partie entière)

Peut-on prolonger h par continuité en a = 2 ?

Exercice 19 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $h(x) = \sqrt{x^2+x+3}$ 2) $g(x) = \frac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$

3) $t(x) = \tan x$

Solution :1) $h(x) = \sqrt{x^2+x+3}$

x^2+x+3 Est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une Fonction polynôme

de plus $(\forall x \in \mathbb{R})$($x^2+x+3 \geq 0$)

(Son discriminant Δ est négatif)

Donc h est continue sur $\mathbb{R}$

2) $g(x) = \frac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$ est continue sur :

$]-\infty,-3[$ et sur $]-3,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3) La fonction **t** est continue sur tous le intervalles de la forme : $]-\pi/2+k\pi ;\pi/2+k\pi[$ (Où $k \in \mathbb{Z}$)

Exercice 20 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$

2) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+\sin^2 x}}$ 3) $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

Solution :1) Soit f une fonction définie par $f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions : $f_1 : x \to 2x^2-3x+4$ et $f_2 : x \to \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction définie par

$g(x)=\sqrt{\frac{x}{1+\sin^2 x}}$ Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^+$ On a : $D_g=[0;+\infty[$ et Puisque la fonction :

$g_1 : x \to \frac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$g_1(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$ et $g_2 : x \to \sqrt{x}$ sont continue sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $g=g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) $h(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car

$x \to x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc : $x \to \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $(\forall x \in \mathbb{R})$ ($\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$) et sin est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 21 : Soit f et g deux fonctions définies par : $\begin{cases} f(x)=x+1; si...x \prec 0 \\ f(x)=0; si...x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x)=5$

Montrer que f est n'est pas continue en $x_0=0$ et $h=g\circ f$ est continue en $x_0=0$

Solution :on a $f(0)=0$ et

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+1=1\neq f(0)$

Et g est continue en $x_0=0$

mais on a : $(g\circ f)(x)=5$ est continue en $x_0=0$

Exercice 22 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$ 2) $\lim_{x\to +\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

Solution :1)Soient : $f : x \to \frac{1-\cos x}{x^2}\pi$ et $g : x \to \sin x$

Puisque : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\pi=\frac{\pi}{2}$ g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\frac{\pi}{2}$

donc : $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

2) puisque : $\lim_{x\to +\infty}\pi\sqrt{\frac{1-1/x}{1-1/x}}=\pi$

Et la fonction : $x \to \cos x$ continue en π

donc : $\lim_{x\to +\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\cos\pi=-1$

Exercice23 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim_{x\to 0}\sin\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$

Solution :1) $\lim_{x\to 0}\frac{\pi\tan x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{3}\frac{\tan x}{x}=\frac{\pi}{3}$

et Puisque : $x \to \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\frac{\pi}{3}$ donc :

$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\tan x}{3x}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\pi x^2}{4x^2}=\frac{\pi}{4}$

et Puisque : $x \to \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0=\frac{\pi}{4}$ donc :

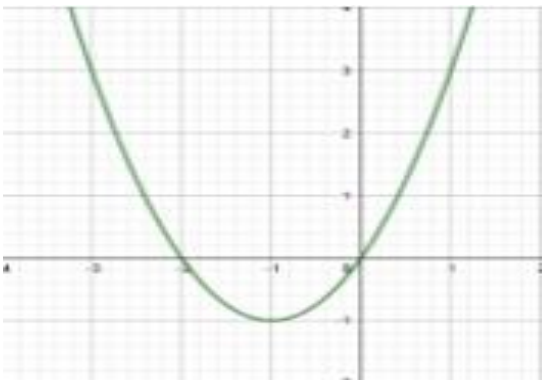
donc : $\lim_{x\to +\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) on a : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{0}$ donc : $\lim_{x\to 0}2\frac{x^2}{1-\cos x}=4$

donc : $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}=2 : x \to \sqrt{x}$ est continue en 4

donc : $\lim_{x\to 0}\sin\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}=\sin 2$ car : $x \to \sin x$ est continue en 2

Exercice24 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x)=x^2+2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1,2]$, $[0,2[$; $]-1,0]$

$[2,+\infty[$; $]-\infty,1]$

Solution : Graphiquement en a : $f([-1,2])=[-1,3]$

$f([0,2[)=[-1,0]$ $f(]-1,0])=[0,3[$

$f([2,+\infty[)=[0,+\infty[$ $\quad$ $f(]-\infty,1])=[-1,+\infty[$

Exercice25 : Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ Déterminer les images des intervalles suivants :
[0,1] ; [−2,-1[;] − 1, 1] ; [2, +∞[

Solution : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2+3=5\succ 0$ donc : ***f*** continue et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ donc on a : $f([0;1])=[f(0);f(1)]=\left[-3;\dfrac{-1}{2}\right]$

$$f([-2;-1[)=\left[f(-2);\lim_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}}f(x)\right[=[7;+\infty[$$

$$f(]-1;1])=\left]\lim_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}}f(x);f(1)\right]=\left]-\infty;\dfrac{-1}{2}\right]$$

$$f([2;+\infty[)=\left[f(2);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left[\dfrac{1}{3};2\right[$$

Exercice26 : Montrer que l'équation : $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$; $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Solution : on considère la fonction : g tel que $g(x)=4x^3-3x-\dfrac{1}{2}$

- On a : g est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
  - Et on a : $g(-1)=-\dfrac{3}{2}$ et $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc :

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times g(-1)\prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_1\in\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha_1)=0$

  - Et on a : $g(0)=-\dfrac{1}{2}$ et $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc :

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times g(0)\prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_2\in\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ tel que : $g(\alpha_2)=0$

  - Et on a : $g(0)=-\dfrac{1}{2}$ et $g(1)=\dfrac{1}{2}$ donc :

$g(1)\times g(0)\prec 0$ donc :d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha_3\in]0;1[$ tel que : $g(\alpha_3)=0$

donc l'équation : $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ admet 3 racines différentes dans chacune des intervalles: $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$; $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exercice27 : Montrer que l'équation : $x^3+x+1=0$
Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que $f(x)=x^3+x+1$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1;0[$
- on a : $f(-1)=-1$ et $f(0)=1$ donc : $f(1)\times f(-1)\prec 0$
- $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $]-1;0[$ donc f strictement croissante sur $]-1;0[$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $]-1;0[$

Exercice28 : Montrer que l'équation : $\cos x=x$
Admet au moins une racine dans intervalle : $I=[0;\pi]$

Solution : $\cos x=x\Leftrightarrow\cos x-x=0$
On pose : $f(x)=\cos x-x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=[0;\pi]$
- on a : $f(\pi)=-1-\pi<0$ et $f(0)=1$ donc : $f(0)\times f(\pi)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**
il existe $\alpha\in]0;\pi[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice29 : Montrer que l'équation : $1+\sin x=x$
Admet au moins une racine dans intervalle : $I=\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Solution : $1+\sin x = x \Leftrightarrow 1+\sin x - x = 0$

On pose : $f(x) = 1+\sin x - x$

- On a : f est est continue sur sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I=\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$
- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}\succ 0$ et

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6}\prec 0$ donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[$ tel que : $f(\alpha)=0$

Exercice30 : on considère la fonction : f tel que $f(x)=x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]0;1\right[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Solution :

1)a)On a : f est est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme)

b) $f'(x)=3x^2+1\succ 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c) on a : $f(\mathbb{R})=f\left(\left]-\infty;+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

$=\left]-\infty;+\infty\right[$ et on a : $0\in f(\mathbb{R})$

donc d'après le **(T.V.I)** l'équation**)** l'équation $f(x)$ = 0 admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

1) on a f est est continue sur $[0;1]$ et

$f(0)\times f(1)\prec 0$ ($f(0)=-1$ et $f(1)=1$)

et f strictement croissante sur $[0;1]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation $f(x)$ = 0 admet une solution unique dans $\alpha\in\left]0;1\right[$

3) étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

1cas : si $x\le\alpha$ alors $f(x)\le f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\le 0$ (car $f(\alpha)=0$)

2cas : si $x\ge\alpha$ alors $f(x)\ge f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $f(x)\ge 0$ (car $f(\alpha)=0$)

Exercice31 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I=\left]-2;+\infty\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'=\frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}>0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

puisque g est strictement croissante et continue **sur :** $I=\left]-2;+\infty\right[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur $J=g(I)=g\left(\left]-2;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;1\right[$

2) $\begin{cases} g(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in g(I) \end{cases}$

$\begin{cases} g(y)=x \\ y\in\left]-2;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2}=x \Leftrightarrow y-3=x(y+2)$

$\Leftrightarrow y-xy=2x+3 \Leftrightarrow y(1-x)=2x+3$

$\Leftrightarrow y=\frac{2x+3}{1-x}$ Donc $g^{-1}(x)=\frac{2x+3}{1-x}$

Donc : $g^{-1}:\left]-\infty;1\right[\to\left]-2;+\infty\right[$

$x\to g^{-1}(x)=\frac{2x+3}{1-x}$

Exercice32 : Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repére orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

Solution : 1) $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=I$

$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad f'(x)=\left(\sqrt{2x-1}\right)'=\frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$

x	$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Donc : f est strictement croissante et continue **sur :** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $J=f(I)=f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=[0;+\infty[$

2) $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I)\end{cases}$

$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in[0;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{2y-1}=x\Leftrightarrow 2y-1=x^2$

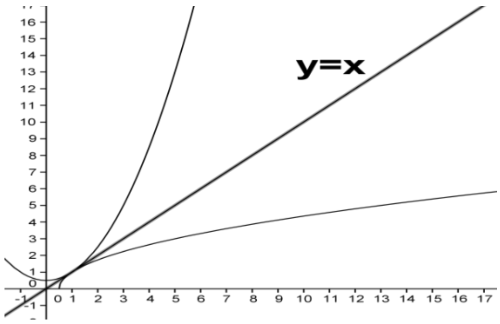
$\Leftrightarrow 2y=x^2+1\Leftrightarrow y=\frac{x^2+1}{2}$

Donc $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

Donc : $f^{-1}:[0;+\infty[\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$x\to f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

3) $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y=x$



Exercice33 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5=32$ **2)** $x^7=-128$ **3)** $x^4=3$ **4)** $x^6=-8$

Solutions :1) $x^5=32$ **donc** $x>0$

$x=\sqrt[5]{32}\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{2^5}\Leftrightarrow x=2$ **donc :** $S=\{2\}$

2) $x^7=-128$ donc $x<0$

Donc : $x=-\sqrt[7]{128}\Leftrightarrow x=-\sqrt[7]{2^7}\Leftrightarrow x=-2$

Donc : $S=\{-2\}$

3) $x^4=3\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{3}$ ou $x=-\sqrt[4]{3}$

Donc : $S=\left\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\right\}$

4) $x^6=-8$

On a $x^6\geq 0$ et $-8<0$ donc $S=\Phi$

Exercice34 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D=\sqrt[6]{\frac{2^5\times 128000000}{27^2}}$

7) $E=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F=\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Solutions :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[2\times 4]{2}=\sqrt[8]{2}$

2) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{2^5}-2+\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}}+\sqrt[4]{\frac{96}{3}}$

$A=2-2+\sqrt[9]{2^9}+\sqrt[5]{32}=2-2+2+2=4$

3) $B=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

4)
$$B=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 2^{\frac{2}{6}}\times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^{8}}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=\frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=2^{\frac{23}{15}-\frac{8}{15}}=2^{\frac{15}{15}}=2$$

5)
$$C=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\frac{(3^3)^{\frac{2}{9}}\times(3^4)^{\frac{1}{4}}\times(3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}\times 3^{1}\times 3^{5}}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$C=\frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}}=3^{\frac{20}{3}-\frac{17}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3^{1}=3$$

6)
$$D=\sqrt[6]{\frac{2^5\times 128000000}{27^2}}=\sqrt[6]{\frac{2^5\times 2^7\times 10^6}{(3^3)^2}}=\sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6}\times 2^{12}}=$$

$$D=\sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6}\times\sqrt[6]{(2^2)^6}=\frac{10}{3}\times 2^2=\frac{40}{3}$$

7)
$$E=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}}=\frac{\sqrt[10]{2^2}\times\sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}}$$

$$=\frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$$

8)
$$F=\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}=\frac{4^{\frac{1}{3}}\times 8^{\frac{1}{2}}\times\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$F=\frac{4^{\frac{1}{3}}\times 8^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{7}{3}}$$

$$F=2^{2+\frac{1}{3}}=2^2\times 2^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{2}$$

Exercice35 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3}=\sqrt[7\times5]{3^5}=\sqrt[35]{243}$ et $\sqrt[5]{2}=\sqrt[7\times5]{2^7}=\sqrt[35]{128}$

On a : $\sqrt[35]{243}>\sqrt[35]{128}$ car $243>128$

Donc **:** $\sqrt[7]{3}>\sqrt[5]{2}$

Exercice36 :résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Solutions :1)

$\sqrt[5]{3x-4}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5=(2)^5\Leftrightarrow 3x-4=32$

$\Leftrightarrow x=12$ donc : $S=\{12\}$

2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$ on pose : $\sqrt[5]{x}=X$

L'équation devient : $X^2-5X+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=2$

Donc : $\sqrt[5]{x}=3$ ou $\sqrt[5]{x}=2$

Donc : $x=243$ ou $x=32$

Donc : $S=\{32;243\}$

Exercice37 :calcules les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Solutions :

1) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}=\sqrt[5]{2^3+24}=\sqrt[5]{8+24}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

4) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ FI

On a : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{x-8}{(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+2^2\right)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\times\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12}$$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2\right)}-\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\times\sqrt[3]{2x+6}+2^2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}-\frac{1}{4}=\frac{-1}{12}$

6)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2-2)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}}=0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to1^+}x+1=2$ et $\lim\limits_{x\to1^+}x-1=0^+$

Exercice38 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Solutions :1)

$A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}=\frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt[5]{2^{10}\times10^5}}{\sqrt[4]{2^6}\times\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}\times\sqrt{2\times3^2}}$

$A=\frac{2^{\frac{10}{3}}\times2\times10}{2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{4}{3}}\times3\times2^{\frac{1}{2}}}=20$

2) a)comparaison de : $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$

on a $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

et on a : $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$ et $\sqrt[5]{4}=\sqrt[4\times5]{4^4}=\sqrt[20]{256}$

donc $\sqrt[5]{4}>\sqrt[4]{3}$ car $256>243$

b)comparaison de : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

on a $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$ et

$\sqrt{13}=\sqrt[2]{13}=\sqrt[2\times3]{13^3}=\sqrt[6]{2197}$

on a $\sqrt[6]{2197}>\sqrt[6]{784}$ car $\sqrt{13}>\sqrt[3]{28}$

b)comparaison de : $\sqrt[15]{151}$ et $\sqrt[5]{23}$

$\sqrt[5]{23}=\sqrt[15]{23^3}=\sqrt[15]{12167}$

Donc : $\sqrt[5]{23}>\sqrt[15]{151}$

Exercice39 :1) Rendre le dénominateur rationnel : $a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $\quad b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$ $\quad d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Solutions :1)

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ on utilise : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-2\right)\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{\sqrt[3]{2}^3-2^3}$

$a=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{-6}=-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3+2\sqrt[3]{2}+2^2\right)}{2}$

$b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times1+1^2\right)}$

$b=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{2}-1$

$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$

$c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}=-\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{3}$

$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}}$

$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$

$d=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}$

2) a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ on utilise :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{-6}{2}=\frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}\times1+x^2}=0$$

Exercice40 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$$

Solutions : $\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-\sqrt[4]{16}}{2x^2+x-3}$

$$=\frac{20x^2-4-16}{\left(2x^2+x-3\right)\left(\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^3}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^2}4+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

$$=\frac{20(x+1)}{(2x+3)\left(\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^3}+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)^2}4+\sqrt[4]{\left(20x^2-4\right)16}+\sqrt[4]{16^3}\right)}$$

Donc : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}=\frac{1}{8}$

Exercice41: 1)simplifier les expressions suivantes : $A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Solution :

$$A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{15}}\times\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A=\frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{37}{15}}=\left(\sqrt[15]{3}\right)^{37}$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}=\frac{\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\times3}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B=\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}\times(3)^{\frac{1}{8}}}=3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{4}{5}}\times(3)^{-\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}=3^{\frac{11}{8}-\frac{4}{5}}=3^{\frac{55}{40}-\frac{32}{40}}$$

$$B=3^{\frac{23}{40}}=\sqrt[40]{3^{23}}$$

2) a) $\sqrt[3]{x-1}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=3^3\Leftrightarrow x-1=27$

$\Leftrightarrow x=28$ donc : $S=\{28\}$

b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

on pose : $x^{\frac{1}{3}}=X$ donc : $X^2-7X-8=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-8)=49+32=81>0$

$x_1=\frac{7+9}{2\times1}=\frac{16}{2}=8$ et $x_2=\frac{7-9}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$

Donc : $x^{\frac{1}{3}}=8$ ou $x^{\frac{1}{3}}=-1$

$x^{\frac{1}{3}}=-1$ n'a pas de solutions

$x^{\frac{1}{3}}=8\Leftrightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=(8)^3\Leftrightarrow x=512$

Donc : $S=\{512\}$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$ on a $x\geq0$

$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0\Leftrightarrow\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}-12=0$

on pose : $\sqrt[6]{x}=X$ donc : $X^3+X^2-12=0$

on remarque que 2 est racine de cette équation

donc : $X^3+X^2-12=(X-2)\left(X^2+3X+6\right)$

$X^3+X^2-12=0\Leftrightarrow X=2$ ou $X^2+3X+6=0$

$\Delta=-15\prec0$ donc $X^2+3X+6=0$ n'a pas de solutions

Donc : $X=2\Leftrightarrow\sqrt[6]{x}=2\Leftrightarrow x=2^6=64$

Donc : $S=\{64\}$

2) a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5}=+\infty$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ on a $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)\left((\sqrt[3]{x})^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}{(x-1)\left((\sqrt[3]{x})^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\left((\sqrt[3]{x})^3-1^3\right)}{(x-1)\left((\sqrt[3]{x})^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left((\sqrt[3]{x})^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left((\sqrt[3]{x})^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left((\sqrt[3]{x+1})^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)\left((\sqrt[3]{x+1})^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left((\sqrt[3]{x+1})^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{(\sqrt[3]{x+1})^3-(1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left((\sqrt[3]{x+1})^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left((\sqrt[3]{x+1})^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)=1\times3=3$

Exercice 42:

1. Résoudre dans ℝ : $x^4=16$
2. Résoudre dans ℝ : $(x-1)^3=-27$

Exercice 43 :

1. Résoudre dans ℝ l'équation: $\sqrt[3]{x}-x=0$
2. Résoudre dans ℝ l'équation :
$\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$
3. Résoudre dans ℝ l'inéquation :
$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-2}\succ1$

Exercice 44 :Déterminer les réels suivants :

1)a = $Arctan\ (tan\ (\frac{2007\pi}{5}))$

2)b = $tan\ (Arctan\ (\frac{2007\pi}{5}))$

3)c = $tan(Arctan(-1))$

4)d = $Arctan\ (tan\ (-1))$

5)e = $tan(Arctan\sqrt{123})$

Solution : 1)on a si $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

arctan($tan\ x$) = x

a = $Arctan\ (tan\ (\frac{2007\pi}{5}))$

= $Arctan\ (tan\ (405\pi+\frac{2\pi}{5}))$= $Arctan\ (tan\ (\frac{2\pi}{5}))$

Et puisque : $-\frac{\pi}{2}\prec\frac{2\pi}{5}\prec\frac{\pi}{2}$ alors : a = $\frac{2\pi}{5}$

2)b = $tan\ (Arctan\ (\frac{2007\pi}{5}))$ = $\frac{2007\pi}{5}$

Car : $(\forall x\in\mathbb{R})(\tan(arctan\ x)=x)$

3)c = $tan(Arctan(-1))$= -1

4)d = $Arctan\ (tan\ (-1))$ = -1 car $-\frac{\pi}{2}\prec-1\prec\frac{\pi}{2}$

5)e = $tan(Arctan\sqrt{123})$= $\sqrt{123}$

Exercice 45 : on considère les nombres suivants : a = $Arctan\frac{1}{2}$ et b = $Arctan\frac{1}{5}$

et c = $\frac{\pi}{4}-\ Arctan\frac{1}{8}$

1)montrer que : tan (a+b)= tan c

2)En déduire que :

$Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}+Arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

Solution : 1)on a : $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$

$\tan(a+b)==\frac{\tan\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\tan\arctan\left(\frac{1}{5}\right)}{1-\tan\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\times an\arctan\left(\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$

$\tan c=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\arctan\left(\frac{1}{8}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\arctan\left(\frac{1}{8}\right)}$

$\tan c=\frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{7}{9}$ Donc : tan (a+b)= tan c

2) $0\prec\frac{1}{2}\prec1\Rightarrow\arctan0\prec\arctan\frac{1}{2}\prec\arctan1\Rightarrow0\prec\arctan\frac{1}{2}\prec\frac{\pi}{4}$

$0\prec\frac{1}{5}\prec1\Rightarrow\arctan0\prec\arctan\frac{1}{5}\prec\arctan1\Rightarrow0\prec\arctan\frac{1}{5}\prec\frac{\pi}{4}$

Donc $0\prec a+b\prec\frac{\pi}{2}$

Et on a : $0\prec\frac{1}{8}\prec1\Rightarrow0\prec\arctan\frac{1}{8}\prec\frac{\pi}{4}\Rightarrow0\prec\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{8}\prec\frac{\pi}{4}$

Donc $0\prec c\prec\frac{\pi}{4}$

On a : tan (a+b)= tan c et puisque tan est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Vers $\mathbb{R}$. Donc : a+b=c

Cad : $Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}-\ Arctan\frac{1}{8}$

Donc : $Arctan\frac{1}{2}+Arctan\frac{1}{5}+Arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

Exercice46 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\cos\frac{1}{x}$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0=0$

2) Etudier la continuité de $f$sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et est ce f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **Solution :** 1) $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$

donc : $|x|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|$ donc : $\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|$

donc : $-|x|\leq f(x)\leq|x|$

et puisque : $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ et $\lim\limits_{x\to0}-|x|=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0=f(0)$

Donc :f est continue en $x_0=0$

2)on a la fonction : $f_1:x\to\frac{1}{x}$ continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et les fonctions : $f_2:x\to\cos x$ et $f_3:x\to x$ sont continués sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Donc : $f=f_3\times(f_2\circ f_1)$ est continue sur les intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Et puisque : f est continue en $x_0=0$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $x\to\cos x$ est continue en $x_0=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos 0=1$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{x}=+\infty$

Exercice 47: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=0$

1)Etudier la continuité de f en $x_0=2$

2)Etudier la continuité de f en $x_1=\sqrt{2}$

3) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) on va écrire f sur les intervalles

Bien définies : $\begin{cases} f(x)=1+(x-1)^2;si...x\in[1;2[\\ f(x)=2+(x-2)^2;si...x\in[2;3[\end{cases}$

On a $f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}1+(x-1)^2=2=f(2)$

donc f est continue à gauche de $x_0=2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}2+(x-2)^2=2=f(2)$

donc f est continue à droite de $x_0=2$

et puisque f est continue à droite et à gauche de $x_0=2$ alors f est continue en $x_0=2$

2)Etudions la continuité de f en $x_1=\sqrt{2}$

Puisque les fonctions : $g:x\to E(x)$ et $h:x\to x$ sont continues en $x_1=\sqrt{2}$

alors : $f=g+(h-g)^2$ est continue en $x_1=\sqrt{2}$

3)Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions : $g:x\to E(x)$ et $h:x\to x$ sont continues sur chaque intervalle dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

Alors la fonction : $f=g+(h-g)^2$ est continue sur chaque intervalle dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

3)Etudions la continuité de f sur $\mathbb{Z}$

Soit : $k\in\mathbb{Z}$ on a $f(k)=k$

$\begin{cases} f(x)=k-1+(x-k+1)^2;si...x\in[k-1;k[\\ f(x)=k+(x-k)^2;si...x\in[k;k+1[\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to k^-} f(x)=\lim\limits_{x\to k^-}k-1+(x-k+1)^2=k=f(k)$

donc f est continue à gauche de $x_0=k$

$\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=\lim\limits_{x\to k^+}k+(x-k)^2=k=f(k)$

donc f est continue à droite de $x_0=k$

et puisque f est continue à droite et à gauche de $x_0=k$ alors f est continue sur $\mathbb{Z}$

conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice48 : soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tels que f est bornée et g continue sur $\mathbb{R}$;Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

Solution :1) f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existent deux réels m et M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$
$m\leq f(x)\leq M$

Donc : $f(x)\in[m;M]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $g(f(x))\in g([m;M])$ $\forall x\in\mathbb{R}$

et puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ alors
g est continue sur $[m;M]$ donc il existent deux réels a et b tel que $g([m;M])=[a;b]$

donc $g(f(x))\in[a;b]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\leq g(f(x))\leq b$ $\forall x\in\mathbb{R}$

donc $a\leq (g\circ f)(x)\leq b$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $g\circ f$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

2)la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc :
$g(\mathbb{R})=I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$

et puisque f est bornée sur $\mathbb{R}$ Donc :
$f(y)\in[m;M]$ $\forall y\in I$

Donc : $f(g(x))\in[m;M]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $m\leq (f\circ g)(x)\leq M$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f\circ g$ sont bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 49: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a;b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des nombres de l'intervalle $[a;b]$

Montrer que l'équation :
$3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Solution :

On considéré la fonction g définie sur $[a;b]$ par
$g(x)=3f(x)-(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$

la fonction g est continue sur l'intervalle $[a;b]$

soit $f(\alpha)$ le plus petit des nombres $f(x_1);f(x_2)$; $f(x_3)$ et soit $f(\beta)$ le plus grand des nombres $f(x_1);f(x_2)$et $f(x_3)$

On a : $g(\alpha)=3f(\alpha)-(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$
$g(\alpha)=(f(\alpha)-f(x_1))+(f(\alpha)-f(x_2))+(f(\alpha)-f(x_3))$

Donc : $g(\alpha)\leq 0$

De même : on a : $g(\beta)=3f(\beta)-(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$
$g(\alpha)=(f(\beta)-f(x_1))+(f(\beta)-f(x_2))+(f(\beta)-f(x_3))$

Donc : $g(\beta)\geq 0$

et puisque g est continue sur$[a;b]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel c dans $[a;b]$ tel que : g(c) = 0

Cad $3f(c)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$

Donc l'équation $3f(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a;b]$

Exercice50 : soient f et g sont deux fonctions continues sur$[a;b]$ tels que :
$0\prec g(x)\prec f(x)$ $\forall x\in[a;b]$

Montrer que :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$

Solution : Montrons que :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$ Cad :

$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];\lambda\leq\frac{f(x)}{g(x)}-1$

On considéré la fonction h définie sur $[a;b]$par
$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}-1$la fonction h est continue sur l'intervalle $[a;b]$car f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$et $g(x)\neq 0$ $\forall x\in[a;b]$ Donc la fonction h admet un minimum λ Cad il existe $x_0\in[a;b]$ tel que :

$\lambda=h(x_0)=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}-1$ et $\lambda\leq h(x)$ $\forall x\in[a;b]$

On a : $0\prec g(x_0)\prec f(x_0)$ donc $0\prec\frac{f(x_0)}{g(x_0)}-1$

donc : $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ donc :
$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\forall x\in[a;b];(1+\lambda)g(x)\leq f(x)$

Exercice 51: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ tel que : $f\left(a\right)\prec 0$

il existe $x_0 \in \left]a;b\right[$ tel que : $f\left(x_0\right)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Solution :

On a : $f\left(x_0\right)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0} \Leftrightarrow \left(b-x_0\right)f\left(x_0\right)-\left(a-x_0\right)=0$

On considéré la fonction g définie par :

$g\left(x\right)=\left(b-x\right)f\left(x\right)-\left(a-x\right)$;la fonction g est continue sur l'intervalle $\left[a;b\right]$car c'est la somme de fonctions continues sur $\left[a;b\right]$

On a : $g\left(a\right)=\left(b-a\right)f\left(a\right)\prec 0$ car $f\left(a\right)\prec 0$

Et $b-a\succ 0$ et on a : $g\left(b\right)=b-a\succ 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe $x_0 \in \left]a;b\right[$ tel que : $g\left(x_0\right)=0$ cad $f\left(x_0\right)=\dfrac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 52 : Soit la fonction $f\left(x\right)=x^2+x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

Exercice 53 : Soit la fonction $g\left(x\right)=x-2\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$et déterminer $g^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

Exercice 54 : Soit la fonction $h\left(x\right)=\dfrac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de$]-1,1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien