Etude d'une primitive

1 Déterminer le domaine de F dans chacun des cas suivants

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{t-1}\,dt \quad , \quad F(x)=\int_0^{\ln x} \frac{1}{t-1}\,dt \quad , \quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \quad , \quad F(x)=\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-4}\,dt$$

2 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln t} \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\,dt$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+t^3}\,dt \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}\,dt \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}\,dt$$

3 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\displaystyle\int_x^{4x}\frac{t}{\ln(t-1)}\,dt$

1) montrer que f est définie sur $D=\left]2,+\infty\right[$

2) montrer que f e dérivable sur D et calculer $f'(x)$

4 Soit F la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ p : $F(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\,e^{-t}\,dt$

1) a) déterminer le signe de $F(x)$

b) montrer que F est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et calculer $F'(x)$ puis étudier le sens de variation de F

2) a) montrer que $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\quad 2\sqrt{t}\le t+1$

b) calculer $\displaystyle\int_0^x (t+1)e^{-t}\,dt$ puis déduire que $(\forall x>0)\quad F(x)\le 1$

5 Soit F la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt & ; \quad x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

1) a) montrer que $\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\right)\quad 0\le F(x)\le \ln 2\,\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

b) en déduire que F est continue à droite de 0

2) montrer que F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et calculer $F'(x)$

3) F est-elle dérivable à droite de 0 ?

Etude d'une primitive

6 On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$

1) étudier la parité de la fonction G

2) a) montrer que $(\forall x > 0)\ (\ln 2)\ln(1+x^2) \leq G(x) \leq (\ln 2)\ln(1+4x^2)$

b) étudier la dérivabilité de G à droite de 0

3) étudier la branche infinie de la courbe de G au voisinage de $+\infty$

4) a) montrer que G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $G'(x)$

b) étudier les variation de G et dresser sa table de variation

5) tracer la courbe de la fonction G

7 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$

1) montrer que le domaine de f est $D_f = \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$

2) a) montrer que $(\forall x \in D_f)\quad \frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$

b) en déduire les limites $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) on pose $g(x) = 2 - 2x + \ln x \quad ; \quad x > 0$

a) étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0, +\infty[$

b) en déduire que : $\left(\exists! \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\ \right)\quad g(\alpha) = 0$

c) prouver que $\forall t \in [\alpha, 1]$: $\ln t \geq 2t - 2$ en déduire que $\left(\forall x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right[\right)\quad f(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$

d) déterminer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$

e) montrer que $(\forall t \geq 1)\quad \ln t < t - 1$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$