

## Calcul intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes

$$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1} dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3} dx$$

$$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}} dx$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2} dx$$

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x} dx$$

$$J_2 = \int_0^1 x \ln(2x+1) dx$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\cos x dx$$

$$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$$

$$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2+1} dx$$

$$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x dx$$

3 A l'aide d'une intégration par changement de variable calculer :

$$K_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}} dt$$

$x = 1+e^t$  **ضع**

$$K_2 = \int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}} dx$$

$t = \sqrt{x-1}$  **ضع**

$$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} dx$$

$t = \sqrt{x^2+1}$  **ضع**

$$K_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  **ضع**

$$K_5 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$t = \sqrt{x^2-1}$  **ضع**

$$K_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx$$

$t = \sqrt{e^x-1}$  **ضع**

4 Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  telle que :  $(\forall x \in [a, b]) f(a+b-x) = f(x)$

1) montrer que  $\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

2) déduire la valeur de  $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

5 Montrer que  $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx \leq 1$

$$\frac{1}{1+\pi^2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \frac{4}{4+\pi^2} \quad , \quad \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

6

On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$  ;  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$  pour tout entier naturel  $n$

1) calculer  $I_0$  ,  $J_0$

2) montrer que  $I_n + nJ_n = 1$  et  $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$  puis déduire  $J_n$  ,  $I_n$

**Calcul intégrale**

7

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx \quad \text{et} \quad L = \int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{(x^2+4x+5)^2} dx$$

- 1) calculer  $I$
- 2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que  $2J = I + \frac{1}{2}$  en déduire  $J$
- 3) a) Montrer que  $K = -I + 2J$  et déduire  $K$   
b) Poser  $t = \arctan x$  et calculer  $K$
- 4) En posant  $t = x+2$  déterminer  $L$

8

Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on pose  $I_0 = \int_1^e x dx$  et  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

- 1) calculer  $I_1$  ,  $I_0$
- 2) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$   
b) en déduire la valeur de  $I_2$
- 3) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_{n+1} \leq I_n$   
b) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

9

1) soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

calculer la dérivée  $f'(x)$  et déduire la valeur de  $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2) on considère les intégrales  $B = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$  et  $C = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

- a) en utilisant une intégration par parties exprimer  $B$  en fonction de  $A$
- b) montrer que  $A + C = B$  déduire  $C$  ;  $B$

10

déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$$U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{k} \quad (3) \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 + k^2} \quad (2) \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + nk}} \quad (1)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n\sqrt{n(2n-k)}} \quad (6) \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sqrt{2^k}}{n} \quad (5) \quad U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (4)$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k} \quad (7) \quad U_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \quad (8) \quad U_n = \frac{1}{(n+1)^4} \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad (9)$$