

Exercices d'applications et de réflexions : FONCTIONS LOGARITHMIQUES

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

TD -FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Exercice1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \rightarrow \ln(x+1)$ 2) $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $h : x \rightarrow \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \rightarrow \ln x + \ln(x-1)$

5) $m : x \rightarrow \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

Exercice2 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes : 1) $\ln(x-2) = 0$

2) $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$ 3) $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$

4) $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$ 5) $\ln(2x-6) \geq 0$

6) $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

Exercice3 : On pose $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$

Calculer: $\ln(6)$; $\ln(4)$; $\ln(8)$; $\ln(72)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$; $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(\sqrt{6})$; $\ln(3\sqrt{2})$

$\ln(12\sqrt[3]{3})$; $A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$B = \frac{1}{4}\ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27}$ et $C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$

Exercice4 : On pose $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$
Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$\ln(a^2b^5)$ et $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

Exercice5 : simplifier et calculer :

$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$

Exercice6 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-1) = \frac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

3) $3(\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0$ 4) $\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$

5) $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3$

6) $\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$

7) $\ln(14-x) > \ln(10+7x-3x^2)$

Exercice7 : Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système

suivant :
$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

Exercice8 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}$ 2) $g : x \rightarrow \sqrt{1 - \ln(e-x)}$

3) $h : x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^2$ on pose : $X = \sqrt{x}$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x-1} \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5$$

Exercice10 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

Exercice11 : calculer la dérivée des fonctions définies par : 1) $f(x) = x^2 - \ln x$ 2) $f(x) = x \ln x$

$$3) f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Exercice12 : calculer la dérivée de la fonction définie sur $I =]-2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}$

Exercice13 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln|\ln|x||$$

$$2) f(x) = \ln|\sin^2 x + 3\sin x + 4|$$

Exercice14 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$1) I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} \quad 2) I =]0; 1[; g(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$3) I =]-\infty; 1[; h(x) = \frac{1}{x-1} \quad 4) I = \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$5) M(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (\text{Essayer d'écrire}$$

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ des réels à}$$

déterminer).

$$6) N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x-3}$$

$$7) I =]3; +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$$

Exercice 15 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{5x+1}{x^2 + x - 2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que :

$$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2) En déduire la fonction primitive de f sur $]-\infty; -2[$ Tel que $F(-3) = \ln 2$

Exercice 16 : simplifier et calculer :

$$1) \log_8 4 \quad 2) \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \quad 3) \log_{\sqrt{3}} 9$$

$$4) A = \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2 (10) + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[5]{3} \right)$$

Exercice17 : On pose $\alpha = \log_{40} (100)$ et

$$\beta = \log_{16} (25) \quad \text{Calculer } \beta \text{ en fonction } \alpha$$

Exercice18 : simplifier et calculer :

$$1) \log_{10} 100 \quad 2) \log_{10} 0,0001$$

$$3) A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$$

Exercice 19 : déterminer le plus petit entier

$$\text{naturel } n \text{ tel que : } \left(\frac{3}{2} \right)^n \geq 10^{20}$$

Exercice 20 : 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$1) \log_3 (2x) \times (\log_5 (x) - 1) = 0$$

$$2) 2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$$

$$3) \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

$$4) \log_{2x} (4x) + \log_{4x} (16x) = 4$$

Où \log est le logarithme décimal

Exercice 21 : 1) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations et équations suivantes :

$$1) \log_3 (7x-1)^2 = 0 \quad 2) \log_3 (5x+1) = 2$$

$$3) \frac{\log_3 (5x+1)}{\log_3 (7x-1)^2} \leq 1$$

Exercice 22: A) soit la fonction g définie

$$\text{par : } g(x) = x - \ln x$$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes

de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

3) en déduire que : $\forall x > 0 \quad x > \ln x$

B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1) Montrer que $D_f = [0; +\infty[$

2) Montrer que f est continue à droite de 0

3) calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7) déterminer les points d'intersections de C_f et la

Droite : $(\Delta): y = 1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses

en un point d'abscisse dans $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ ($\ln 2 \approx 0,7$, $e \approx 2,7$)

Exercice 23 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

1) a) calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$$

b) montrer que : $\forall x \in]-1; +\infty[$ on a :

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right)$$

et en déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c) Etudier les variations des fonctions f et g Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

4) montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 24 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) montrer que le domaine d'étude de f est :

$$D_E =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f)

la courbe de f

6) Construire la courbe (C_f) dans D_E

Exercice 25 : 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x)$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation :

$$\log_2(x) > \log_x(2)$$

Exercice 26 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) Résoudre l'équation $f(x) = 1$

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$

- 4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e
- 5) Etudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J .
- 6) Construire dans le même repère C_f et $C_{f^{-1}}$

Exercice 27 : Considérons la fonction g définie

$$\text{par : } g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g
2. a) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 noté g
- b) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.
4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g
5. Etudier les branches infinies de la courbe C_g .
6. Construire la courbe C_g

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices Que l'on devient un mathématicien*

