

## Fonction logarithme

### Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \ln x}{3 + \ln x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} \ln \left( \frac{x^3+1}{x^2+2} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(+2 \tan x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\ln x}$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln x - x \ln(x+2)$		$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) \ln(x^2 + 2x - 3)$	

### Exercice 2

**Partie (1)** Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x - 2(x+1) \ln(x+1)$

- 1) montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- 2) a) calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g$  est décroissante  
b) en déduire que  $(\forall x \in ]0, +\infty[) g(x) < 0$

**Partie (2)** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

- 1) montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  poser  $t = \sqrt{x}$
- 2) montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  interpréter graphiquement le résultat
- 3) a) montrer que  $f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$   
b) dresser le tableau de variations de  $f$
- 4) tracer la courbe  $(C_f)$  manti.1s.fr

### Exercice 3

**Partie (1)** On pose  $g(x) = x - 4 + 4 \ln x$

- 1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$
- 2) calculer  $g'(x)$  puis donner le tableau de variation de
- 3) a) montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]1, 2[$  une seule solution  $\alpha$   
b) en déduire que :  $g(x) > 0$  sur  $]\alpha, +\infty[$  et  $g(x) < 0$  sur  $]0, +\infty[$

**Partie (2)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \ln x$

### fonction logarithme

- 1) montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  interpréter géométriquement le résultat
- 2) montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  donner une interprétation graphique
- 3) a) montrer que  $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$   
 b) vérifier que  $f(\alpha) = -\frac{4}{\alpha}(\ln \alpha)^2$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) tracer  $(C_f)$  on donne  $\alpha \approx 1,75$  ;  $f(\alpha) \approx -0,72$  et  $f(1) = f(4) = 0$

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  ;  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

#### Partie (1)

- 1) a) montrer que  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$   
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de  $x_0 = 0$
- 2) calculer les limites de la fonction  $f$
- 3) calculer  $f'(x)$  et étudier le sens de variation de  $f$   
 puis donner le tableau de variation
- 4) tracer la courbe  $(\zeta_f)$

#### Partie (2)

On considère la fonction  $g$  telle que :  $g(x) = f(-1-x)$

- 1) déterminer le domaine de définition de  $g$
- 2) montrer que les courbes de  $g$  et  $f$  sont symétrique par rapport à  $(\Delta) \quad x = -\frac{1}{2}$
- 3) a) montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) < 1 < g(n)$   
 b) en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

### Exercice 5

On pose  $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

- 1) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :  
 $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$
- 2) a) montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$   
 b) en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$

### fonction logarithme

3) on considère la suite  $(V_n)_n$  définie par :  $V_n = U_{n+1} - \ln n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

On pose  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  et  $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$

a) Dresser le tableau de  $g$  et  $f$

b) En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) Vérifier que  $V_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} f(k)$  en déduire que  $(V_n)_n$  est décroissante

d) Montrer que  $(\forall n > 1) \quad f(1) < V_n < 1 - \frac{1}{n}$  déduire que  $(V_n)_n$  est convergente puis encadrer sa limite  $a$

### Exercice 6

Soit  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ . on considère la fonction  $f_n$  telle que  $f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$

1) a) résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $(x+1)^2 < 2x^2$

b) montrer que  $(\forall p \in \mathbb{N}) \quad p \geq 5 \Rightarrow p^2 < 2^p$

c) étudier le signe de  $f_n(n+1)$  et  $f_n(n+2)$

2) calculer  $f'_n(x)$  et  $f''_n(x)$  puis dresser le tableau de  $f_n$

3) a) calculer la limite  $\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f_n(x)$

b) montrer que  $(\forall x > n) \quad f_n(x) = -n \ln(x) - x \ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

c) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

4) tracer la courbe de la fonction  $f_3$

5) a) montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha_n$

b) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n - n) = 1$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$

### Exercice 7

**Partie (1)** Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g$  est croissante sur  $]0, +\infty[$

2) montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  puis que  $\alpha < \frac{1}{e}$

3) déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$

**Partie (2)** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} ; x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

## fonction logarithm

- 1) a) montrer que  $f$  est continue à droite de 0  
 b) étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 0
- 2) a) calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 b) étudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) a) montrer que :  $(\forall x > 0) f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$   
 b) vérifier que  $f(\alpha) = -\alpha$  et dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) tracer la courbe  $(C_f)$  (on donne  $\alpha \approx 0,28$ )

**Partie (3)** soit  $n$  un entier naturel

- 1) montrer que l'équation  $f(x) = n$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $x_n$
- 2) montrer que  $f(e^n) < n$  en déduire que  $x_n > e^n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$
- 3) montrer que  $\ln\left(\frac{x_n}{e^n}\right) = \frac{n}{x_n}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{e^n}$

## Exercice 8

**Partie (1)** On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

- 1) déterminer le domaine de  $f$  et calculer les limites de  $f$
- 2) calculer la dérivée  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$
- 3) soit  $m$  un paramètre de  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
 a) montrer que  $\frac{1}{m+1} \leq \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$   
 b) déduire que  $(\forall m \in \mathbb{R}^{+*}) 0 < f(m) < \frac{1}{m(m+1)}$

**Partie (2)**

On pose  $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$  et  $T_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+n) / \forall n \in \mathbb{N}^*$

- a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < T_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$  calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$
- b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) T_n = U_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$  en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- c) on pose  $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{2n}$   
 montrer que  $U_n - \frac{1}{n} \leq V_n \leq U_n + \frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N}^*)$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$