

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (\ln x)^4, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+3\sqrt{x})}{\ln(1+2x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous

$$1) \quad 2\ln(x-2) - \ln(x+3) = 0 \quad , \quad (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0 \quad , \quad (\ln x)^3 - \ln x = 0$$

$$2) \quad \ln(x^2 - x) + \ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0 \quad , \quad \ln x - 2 \geq \frac{4}{\ln x} \quad , \quad \ln x > -1 + \ln 2$$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) \ln(1+x) \leq x \leq (x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$

Exercice 4

1) a) montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) \ln t \leq t - 1$

b) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) x \ln x \geq x - 1$

2) montrer que $(\forall x \in [1, +\infty[) x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

3) soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln x$

a) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variations

b) soit n de \mathbb{N}^* montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une seule solution a_n et $1 < a_n < e$

c) étudier la monotonie de $(a_n)_{n \geq 1}$ et déduire qu'elle est convergente

d) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^2 - 2n \ln x$$

1) a) calculer les limites $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

b) étudier les variations de f_n et donner le tableau de variations

2) montrer que $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n telles que $u_n < \sqrt{n} < v_n$

3) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{2}$

4) a) montrer que $(\forall n \geq 3) u_n \geq 1$

b) vérifier que $f_{n+1}(u_n) = -\ln u_n$ en déduire que $(u_n)_n$ est convergente

c) montrer que $(\forall n \geq 3) u_n \leq e^{\frac{3}{2n}}$ en déduire la limite de $(u_n)_n$

Exercice 6

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \ln x \leq x - 1$

2) soit n de \mathbb{N} tel que $n \geq 2$. $x_1; x_2; \dots; x_n$ et $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ des réels de \mathbb{R}^{+*}

Tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1; 2; \dots; n\}$ on a : $\alpha_k \ln \left(\frac{x_k}{y} \right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1; x_2; \dots; x_n$ de \mathbb{R}^{+*}

Exercice 7

1) montrer que $(\forall x > 0) x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2) on pose $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$ pour tout entier naturel n non nul

a) calculer U_1 ; U_2

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente (on donne $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) on pose $V_n = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$ pour n de \mathbb{N}^* .

montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 8

Soit x de $]0, +\infty[$ on considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x)$$

1) montrer que φ vérifie les conditions de Rolle sur $[0, x]$

2) en déduire qu'il existe un réel c tel que $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$

3) déduire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

4) déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$