

### التمرين الأول

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

دراسة دالة لوغاريتم

1) a) étudier la parité de  $f$

b) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , interpréter le résultat

2) a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$

b) étudier le sens de variation de  $f$  et donner le tableau de variation

c) déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$

3) construire la courbe  $(C_f)$

4) montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$  une seule solution  $\alpha$

5) montrer que  $(\forall x \in I) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

6) on considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

c) déduire que  $(U_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite

### التمرين الثاني

Partie (1)

1) résoudre l'équation  $2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1 = 0$  et déduire le signe de  $2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1$

2) soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x} - x$

a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

3) étudier le sens de variation de  $f$  et donner sa table de variation

4) montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions distinctes  $\alpha$ ,  $\beta$

5) construire la courbe  $(C_f)$  ( on donne  $\alpha \approx -0,8$  et  $\beta \approx 0,7$  )

Partie (2)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  par :  $g(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

1) étudier le sens de variation de  $g$ , montrer que  $g(I) \subset I$

2) montrer que  $(\forall x \in I) \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) on considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :  $U_0 = \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = g(U_n)$

a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

دراسة دالة لوغاريتم

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left| U_{n+1} - \beta \right| \leq \frac{1}{2} \left| U_n - \beta \right|$

c) déduire que  $(U_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite

### التمرين الثالث

Soit  $n$  un entier naturel . on considère la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = -1 + n(2-x)e^x$

1) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$

2) calculer  $f'_n(x)$  et étudier le sens de variation de  $f_n$  puis dresser le tableau de variation

3) montrer que l'équation  $(E_n) \quad f_n(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha_n < 0$  et  $\beta_n \in ]1, 2[$

4) a) montrer que  $( f_{n+1}(t) = (2-t)e^t ) \Leftrightarrow ( t \text{ solution de } (E_n) )$

b) montrer que  $f_{n+1}(\beta_n) > 0$  t déduire que  $(\beta_n)_n$  est croissante

c) montrer que  $(\beta_n)_n$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 2$

5) a) montrer que  $(\alpha_n)_n$  est décroissante

b) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$

### التمرين الرابع

Partie (1)

1) on pose  $g(x) = e^x + x + 1$

a) montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$

b) déduire le signe de  $g(x)$

2) on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

a) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

b) calculer  $f'(x)$

c) vérifier que  $f(\alpha) = 1 + \alpha$  puis dresser le tableau de variation de  $f$

d) tracer la courbe  $(C_f)$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$  ( on prend  $\alpha \approx -1,25$  )

partie (2)

soit un entier naturel .

1) a) montrer que l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution  $\alpha_n$

b) étudier la monotonie de la suite  $(\alpha_n)_n$

c) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \geq n$  ; déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

2) a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha_n - n = ne^{-\alpha_n}$  et déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n - n$

b) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n - n = -\infty$

### التمرين الخامس

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

1) a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

دراسة دالة لوفاريتم

b) étudier les branches infinies

2) a) montrer que  $(\forall t > 0) \ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$

b) calculer  $f'(x)$  et déduire que  $f$  est décroissante puis donner le tableau de variation

3) montrer que  $(C_f)$  coupe la droite  $(\Delta) y = x$  en un point d'abscisse  $\alpha$  appartenant à  $]0, \ln 2[$

4) tracer la courbe  $(C_f)$

5) on pose  $I = ]0, \ln 2[$ . on considère la suite  $(U_n)_n$  telle que  $U_0 = \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que  $(\forall x \in I) |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$   $(\forall x \in I) |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

b) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \in I$

c) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$  déduire que  $(U_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite

التمرين السادس

Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ .

on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = 1 - x - e^{-nx}$

1) montrer que  $(\forall x \in ]1, +\infty[) \ln x < x - 1$  ; déduire  $(\forall x > 1) e^{x-1} > x$

2) a) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et étudier le sens de variation de  $f_n$

b) montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une seule solution  $a_n$  et que  $a_n < 1$

3) a) étudier le sens de variation de la fonction  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est croissante et qu'elle est convergente

4) montrer que  $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$  ; déduire la limite de  $(a_n)_n$

التمرين السابع

Soit  $n$  un entier non nul . on considère la fonction  $f_n$  définie par :  $f_n(x) = e^x + \frac{x}{n}$

1) a) calculer les limites de  $f_n$

b) étudier les variations de  $f_n$  et dresser le tableau de variation

2) montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une seule solution  $a_n$  et que  $a_n \in ]-\infty, 0[$

3) a) montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 3}$  est décroissante

b) montrer que  $f_n(-\ln \sqrt{n}) > 0$  et déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

c) déterminer le signe de  $f_n(-\ln(n))$  . déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$

d) vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \frac{a_n}{\ln n} = -1 + \frac{\ln(-a_n)}{\ln n}$  puis déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\ln n} = -1$