



الصفحة	2	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
5			

- 0.5 a) Montrer que  $x$  et 13 sont premiers entre eux.
- 0.5 b) En déduire que :  $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$
- 1 c) Montrer que :  $x^3 \equiv 10 \pmod{13}$
- 0.5 d) En déduire que :  $x^{12} \equiv 3 \pmod{13}$
- 1 2- Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$

**EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)**

**(Si tu choisis de traiter EXERCICE2, il ne faut pas traiter EXERCICE1)**

On note par  $M_2(i)$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que  $(M_2(i), +, \cdot)$  est un anneau non commutatif unitaire d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que  $(i, \cdot)$  est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble  $E$  de  $M_2(i)$  défini par :  $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x \in i \text{ et } y \in i^* \right\}$ .

0.5 1- a) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(i), \cdot)$

0.5 b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans  $E$

0.5 c) Vérifier que :  $\left( \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \neq \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ax + xy \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ax + xy \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$

0.5 2- Montrer que  $(E, \cdot)$  est un groupe non commutatif.

3- On considère le sous-ensemble  $F$  de  $E$  défini par :  $F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in i \right\}$

0.5 a) Montrer que l'application  $j$  définie par :  $j : \left( \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right) \mapsto M(x)$  est un homomorphisme de  $(i, \cdot)$  vers  $(E, \cdot)$ .

1 b) En déduire que  $(F, \cdot)$  est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

**EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)**

Soit  $m$  un nombre complexe non nul.

**Première partie :**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$ , (E) :  $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$

0.5 1- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) ( On remarque que  $m$  est une solution de l'équation (E) )

الصفحة	3	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
	5		

2- On note  $z_1$  et  $z_2$  les deux autres solutions de l'équation (E) autre que  $m$

0.25 a) Vérifier que :  $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0.5 b) Dans le cas où  $m = 1 + e^{i\frac{p}{3}}$ , écrire sous la forme algébrique  $z_1$  et  $z_2$

**Deuxième partie :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; u, v)$

On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = m e^{i\frac{p}{3}}$  et  $b = m e^{-i\frac{p}{3}}$

On note  $P$  le centre de la rotation d'angle  $\frac{p}{2\theta}$  qui transforme  $O$  en  $A$ ,

$Q$  le centre de la rotation d'angle  $\frac{p}{2\theta}$  qui transforme  $A$  en  $B$

et  $R$  le centre de la rotation d'angle  $\frac{p}{2\theta}$  qui transforme  $B$  en  $O$

0.25 1- Montrer que les points  $O, A$  et  $B$  ne sont pas alignés.

1 2-a) Montrer que l'affixe de  $P$  est  $p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7p}{12}}$  et que l'affixe de  $R$  est  $r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7p}{12}}$

0.5 b) Montrer que l'affixe de  $Q$  est  $q = m\sqrt{2} \sin\frac{7p}{12}$

0.5 3- Montrer que  $OQ = PR$  et que les deux droites  $(OQ)$  et  $(PR)$  sont perpendiculaires.

**EXERCICE4 :(13 points/obligatoire)**

**Première partie :**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [0; +\infty[$  par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad (x \in ]0; +\infty[) ; \quad f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; i, j)$ .

$$(\text{On prendra } \|i\| = \|j\| = 1 \text{ cm})$$

0.5 1- On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $t \mapsto \ln(t)$  sur l'intervalle

$$[x, x+1], \text{ montrer que : } (P) \quad (x \in ]0; +\infty[) ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

0.5 2-a) En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction  $f$  est dérivable à droite en 0

الصفحة	4	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
	5		

0.5 b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 3-a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) ; f'(x) = 3x^2 \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{3(1+x)}$$

0.5 b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$   
(On pourra utiliser la proposition (P))

0.25 c) Dresser le tableau de variations de  $f$

4- Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on pose :  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0.75 a) Vérifier que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) ; g'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+x)}$ , en déduire que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

0.5 b) Montrer que l'équation  $g(x) = 1$  admet sur  $]0; +\infty[$ , une solution unique notée  $a$  puis vérifier que  $a \in ]1; 2[$  (On prendra  $\ln 2 = 0.7$  et  $\ln \frac{3}{2} = 1.5$ )

0.5 c) En déduire que les seules solutions de l'équation  $f(x) = x$  sont 0 et  $a$

0.5 5-a) Représenter graphiquement la courbe (C).

(On précisera la demi-tangente à droite en  $O$  et la branche parabolique de (C))

0.25 b) Montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $I$  (On note  $f^{-1}$  sa bijection réciproque)

### Deuxième partie :

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $0 < u_0 < a$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0.5 1- Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < a$

0.5 2-a) Montrer que :  $g(]0; a]) = ]0; 1[$

0.5 b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente.

0.5 3- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Troisième partie :

On considère la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $I$  par :  $(\forall x \in I) ; F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

0.5 1-a) Etudier suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $F(x)$

الصفحة	5	NS 25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة بالفرنسية)
5			

0.5 b) Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $I$  et déterminer sa dérivée première  $F'$

0.25 c) En déduire que  $F$  est strictement décroissante sur  $I$

0.5 2-a) Montrer que :  $(x \in ]1; +\infty[) ; F(x) = (1-x) \ln 2$

0.25 b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0.5 3-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(x \in ]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{t^3}{t+1} dt$$

0.5 b) Calculer  $\int_x^{+\infty} \frac{t^3}{t+1} dt$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  (On remarque que :  $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$ )

0.5 c) En déduire que :  $(x \in ]0; +\infty[) ; F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$

0.5 d) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ , en déduire la valeur de  $\int_0^1 f(t) dt$

4- Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $v_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$

0.5 a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  :

$$-\frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$$

0.5 b) En déduire que :  $(n \in \mathbb{N}^*) ; -\frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx \leq v_n \leq -\frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$

$$\text{(On remarque que : } \frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \text{)}$$

0.25 c) Montrer que la suite numérique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

FIN