Correction proposée : examen national 2.SM - 2019

(1

Ex1 : (structure algébrique).

On définie sur $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $*$ par : $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$(x+iy)*(a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$

1

1-a : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tq : $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$; $z' = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

On a :

$z*z' = xa + i(x^2b + a^2y)$

$= ax + i(ya^2 + bx^2)$

$= z'*z$

$\boxed{\text{d/c : la loi } * \text{ est commutative sur } \mathbb{C}}$

1-b Soit $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tq : $z = x+iy$; $z' = a+ib$; $z'' = m+in$

tq : $x, y, a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

il suffit de calculer $z*z'$ et $z'*z''$

on vérifie que :

$(z*z')*z'' = z*(z'*z'')$

d/c : $\boxed{\text{la loi } * \text{ est associative sur } \mathbb{C}}$

1-c :

comme $*$ est commutative.

il suffit de résoudre équation $z*e = z$ d'inconnue $\boxed{e = a+ib}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$.

Soit : $z \in \mathbb{C}^*$ tq : $z = x+iy$

$z*e = z \Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = x+iy$

$\Leftrightarrow xa = x,\ x^2b + a^2y = y$

$\Leftrightarrow a = 1 \ ;\ x^2b = 0$

$\Leftrightarrow a = 1 \ ,\ b = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{e = 1}$

pour $z = 0$ on a : $0 \times 1 = 0$

$\boxed{\text{d'où : } * \text{ admet } e = 1 \text{ comme l'élément neutre.}}$

d : Soit : $z = x+iy$ avec : $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$; $z' = a+ib$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

on a : $z*z' = e = 1$

$\Leftrightarrow xa = 1$ et $x^2b + a^2y = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{x}$ et $b = \frac{-y}{x^4}$

comme : $*$ commutative

$\boxed{\text{alors : le symétrie de } z \text{ est } z' \text{ avec : } z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^4}}$

2 $E = \{x+iy \ / \ x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$

a Soit $z, z' \in E$, $z = x+iy$, $x > 0$; $z' = a+ib$, $a > 0$

On a :

$z*z' = xa + i(x^2b + a^2y) \in E$

car : $x, a > 0 \Rightarrow x.a > 0$

$\boxed{\text{d/c : } E \text{ est stable par } *}$

2-b

On a : $*$ est associative

- toute élément de E est symétrisable de sy $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^4}$

(car : $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$).

- $*$ est commutative

$\boxed{\text{alors : } (E, *) \text{ est un groupe abélien}}$

3 : $G = \{1 + iy \ / \ y \in \mathbb{R}\}$.

on a : $G \subset E$ car : $1 > 0$

Soit : $z, z' \in G$ tq : $z = 1+iy$; $z' = 1+ib$

on a $z * \text{Sym}(z') = z*(1 - ib)$

$= 1 + i(-b + y) \in G$

d'où : $\boxed{G \text{ est un sous grp de } (E, *)}$

[2]. $F = \{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, x>0, y \in \mathbb{R} \}$

[a] Soit : $M(x,y), M(a,b) \in F$ on a :

$M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} xa & xb+ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$

car : $xa > 0$ et $xb+ya \in \mathbb{R}$

de même, $M(a,b) \times M(x,y) = \begin{pmatrix} xa & xb+ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Cc : } F \text{ est stable par } \times \text{ dans } M_2(\mathbb{R})}$

[b] : $\varphi : E \longrightarrow F$

$x+iy \longrightarrow M(x^2, y)$

Soient : $z = x+iy$, $z' = a+ib \in E$

On a ;

$\varphi(z * z') = M((xa)^2, x^2b + a^2y)$

et on a ;

$\varphi(z) \times \varphi(z') = M(x^2, y) \times M(a^2, b) \quad \in F$

$= \begin{pmatrix} (xa)^2 & x^2b+a^2y \\ 0 & (xa)^2 \end{pmatrix}$ (question a)

$= M((xa)^2, x^2b + a^2y)$

d'où :

$\boxed{\varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')} \ (i)$

Soit : $M(a,b) \in F$, $a>0$, $b \in \mathbb{R}$

$z \in E$.

$\varphi(z) = M(a,b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$(a, x > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a}, \ y = b$

alors :

$\boxed{\varphi \text{ est bij de } E \longrightarrow F \ (ii)}$

$\boxed{(i), (ii) \Rightarrow \varphi \text{ est un isomorphisme de } (E,*) \text{ vers } (F,\times)}$

[c] : comme.

• $(E,*)$ est un grp commutatif

• $\varphi : (E,*) \to (F,\times)$ est un iso

alors :

$\boxed{(F,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$

Fin structure.

Exercice II : les nombres complexes.

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$(E) : z^2 - (1+i)(m+1)z + 2im = 0$

[1-a]. $\Delta = (1+i)^2(m+1)^2 - 8im$

$(1+i)^2 = 2i \quad = (1+i)^2[(m+1)^2 - 4m]$

$\boxed{= (1+i)^2(m-1)^2}$

si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ or $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Absurde.

d'où : $\boxed{\Delta \neq 0 \ , \forall m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$

[1-b] Comme : $\Delta = (m-1)^2(1+i)^2$

d'où : $z_1 = \dfrac{(m+1)(1+i) + (m-1)(1+i)}{2} = m \times (1+i)$

$z_2 = \dfrac{(m+1)(1+i) - (m-1)(1+i)}{2} = 1+i$

$\boxed{\text{d'où : les solutions de } (E) \text{ sont : } z_1 = (1+i) \cdot m \ , \ z_2 = 1+i}$

2. Soit $m=e^{i\theta}$ avec : $0<\theta<\pi$

2-a : comme z_1, z_2 sont les sol. de (E)

d'où : $(E) \Leftrightarrow (z-z_1)(z-z_2)=0$

$\Leftrightarrow z^2 - z(z_1+z_2)+z_1z_2=0$

alors : $\begin{cases} z_1+z_2=(1+i)(1+m) \\ z_1 \cdot z_2 = -2im \end{cases}$ (*)

on a : $1+e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= 2.e^{i\frac{\alpha}{2}}.\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(d'après la Formule d'Euler).

Alors :

$z_1+z_2 = (1+e^{i\frac{\pi}{2}}).(1+e^{i\theta})$

$= 4.e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\sqrt{2}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\frac{\theta}{2}$

comme : $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2}>0$

d'où : $z_1+z_2 = 2\sqrt{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned} |z_1+z_2| &= 2\sqrt{2}.\cos\frac{\theta}{2} \\ \arg(z_1+z_2) &\equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\ [2\pi] \end{aligned}}$$

2-b :

$z_1 z_2 = -2im$. (d'après *).

si $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$

d'où : $\exists x \in \mathbb{R}$ tq : $\boxed{m=ix}$

$m=e^{i\theta} \Rightarrow |m|=1=|x| \Rightarrow x=\pm 1$

or : $\theta \in]0,\pi[$ d'où : $x>0$

conclusion : $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m=i$

$\boxed{\text{d'où : } z_1+z_2=(1+i)^2=2i}$

II :

on a : $\Omega(\omega)$ est le milieu du [CD]

d'où : $\omega = \frac{c+d}{2}$

or : D(d) est l'image du B(b) par rotation de centre O(0) et d'angle $\theta=\pi/2$

d'où : $d-z_0 = e^{i\theta}(b-z_0)$

$\Leftrightarrow d = ib = i(1+i)\times m$

$\Leftrightarrow \boxed{d=(i-1).m}$

d'où : $\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{(1-i)+(i-1)m}{2}$.

Donc : $\boxed{\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}}$

1-b : $\frac{b-a}{\omega} = \frac{(1+i).m-(1+i)}{(1-i)(1-m)}\times 2$

$= \frac{(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)}\times 2$ $\boxed{\begin{matrix} m\neq 1 \text{ car} \\ m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \end{matrix}}$

$= \frac{1+i}{i-1}\times 2$

$= \frac{(1+i)(1+i)}{-2}\times 2 = -(1+i)^2$

$\boxed{\frac{b-a}{\omega-z_0}=-2i}$, $z_0=0$

1-c : $\frac{b-a}{\omega-z_0}=-2i \Rightarrow \begin{cases} (\overline{\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{AB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AB = 2.O\Omega \end{cases}$

$\boxed{\text{alors : } (O\Omega)\perp(AB) \text{ et } AB=2O\Omega}$

(3

$\boxed{II-2}$: $(O\Omega)\cap(AB)=\{H(h)\}$.

2-a : on a : $H\in(AB)$ d'où :

les pts A, B, H sont des pts droits (Alignés), d'où $\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\pi[\pi]$

$\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB})\equiv\pi[2\pi]$

d'où : $\boxed{\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}}$ $(e^{i\pi}=-1)$

on a : $(OH)\perp(AB)$

d'où : $\arg\left(\frac{z_H-z_O}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(\pi)$.

alors : $\boxed{\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}}$ $(e^{i\frac{\pi}{2}}=i)$

$\boxed{b}$: $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}:\frac{h-a}{b-a}=x$

$\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}\Rightarrow\exists y\in\mathbb{R}:\frac{h}{b-a}=iy$

$\frac{h-a}{b-a}=x\Leftrightarrow\frac{h}{b-a}=x+\frac{a}{b-a}$

$\Leftrightarrow\boxed{iy=x+\frac{1}{m-1}}$

d'où :

$$\begin{cases}iy=x+\frac{1}{m-1}\\-iy=x+\frac{1}{\bar{m}-1}\end{cases}$$

$\Rightarrow 2iy=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{\bar{m}-1}$

$iy=\frac{1}{2}\frac{\bar{m}-m}{(m-1)(\bar{m}-1)}$

d'où : $h=(b-a)\cdot iy$

$$\boxed{h=\frac{(1+i)}{2}\cdot\frac{\bar{m}-m}{\bar{m}-1}}$$

Rq : $m,\bar{m}$ sont $\neq 1$ car $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Conclusion

$$\boxed{h=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{\bar{m}-m}{\bar{m}-1}}$$

Fin complexe.

Exercice III : Arith. $\mathbb{Z}$

on admet que : 2969 est premier

$\boxed{1}$: on suppose que : $2969\nmid n$.

comme : 2969 est premier.

$\{2969\nmid n$.

alors : $2969\wedge n=1$

d'après : le Théorème de Bezout.

$\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2 : 2969v+n.u=1$

$\Leftrightarrow\boxed{nu\equiv1[2969]}$

1-b : on a : $n^8+m^8\equiv0[2969]$

d'où : $(u.m)^8\equiv-(n.u)^8[2969]$

on : $(n.u)^8\equiv1[2969]$

d'où : $\boxed{(u.m)^8\equiv-1[2969]}$

alors : $(u.m)^{8\times371}\equiv(-1)^{371}[2969]$

d'où : $\boxed{(u.m)^{2968}\equiv-1[2969]}$

car : $2968=8\times371$

1-c :

on a : $(u.m)^{2968} \equiv -1 [2969]$

d'où : $\exists k \in \mathbb{Z} : (u.m)^{2968} = -1 + 2969k$

$\Leftrightarrow \exists u', v' \in \mathbb{Z} : (um)u' + 2969.v' = 1$

$(u' = -(u.m)^{2967}$ et $v' = k)$.

d'après : le Théorème de Bezout

on a : $2969 \wedge u.m = 1$

d'où $\boxed{2969 \nmid u.m.}$

1-d : $\begin{cases} 2969 \wedge u.m = 1 \\ 2969 \text{ premier} \end{cases}$

d'après : le Théorème de Fermat, on a

$(u.m)^{2969-1} \equiv 1 [2969]$

d'où $\boxed{(u.m)^{2968} \equiv 1 [2969]}$

2-a : on a :

$\begin{cases} (u.m)^{2968} \equiv -1 [2969] . (1-b) \\ (u.m)^{2968} \equiv 1 [2969] . (1-d) \end{cases}$

Absurde.

d'où : l'hypothèse dans la question 1 est fausse.

$\boxed{\text{alors : } 2969 \mid n}$

2-b :

$\boxed{\Leftarrow}$: $\begin{cases} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{cases}$

$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv [2969]$

$\boxed{\Rightarrow}$: on a : $2969 \mid n$

d'où : $n \equiv 0 [2969]$

~~d'où ... [2969]~~

Comme dans l'égalité :

$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

m, n jouent des rôles symétriques

alors : si on suppose que

$2969 \nmid m$.

on utilisant la même démarche de la question 1, on va trouver l'Absurde, $(1 = -1)$

conclusion : $2969 \mid m$

d'où :

$\boxed{n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]}$

$\Longleftrightarrow n \equiv 0 [2969]$ et $m \equiv 0 [2969]$

CQFD.

Proposés par : SAÏD IBNJAA

Xymath

Partie Analyse :

Exercice 4 : (10pts) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x\cdot\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)$

$\boxed{1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)$

de : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty}$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} 4\cdot\frac{x}{e^{x}}\left(1 + \frac{xe^{x}}{2} - e^{x}\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0$

Car : $\lim\limits_{-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \frac{x}{e^{x}} = -\infty$

2-a ; la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fncts dérivables sur $\mathbb{R}$

Et ona ; $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right) + 4x\left(-e^{-x} + \frac{1}{2}\right)$

$= 4\left(e^{-x} - xe^{-x} + x - 1\right)$

$\boxed{f'(x) = 4(x-1)(1-e^{-x})}$

$\boxed{2-b}$: Soit $x \in \mathbb{R}$

ona : $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1-x)$.

Si $x < 0$; ona : $\begin{cases} e^{-x} > 1 \\ 1-x > 0 \end{cases}$

d'où : $\forall x < 0,\ f'(x) > 0$

Si $x > 0$; ona : $e^{-x} < 1$.

$x \to 1-x$ change le signe en $x=1$

d'où : $\forall x \in [0;1] : f'(x) \leq 0$

$\forall x \in [1;+\infty[: f'(x) \geq 0$

conclusion :

f str croissante sur $]-\infty, 0]$.
et $[1;+\infty[$

f str décroissante sur $[0,1]$

et ona ; le Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{2-c}$

ona : f continue, strictement croissante sur $]^3/_2, 2[$

alors, f est bijection de $]^3/_2, 2[$ vers.

$f(]^3/_2, 2[) =]6\times\left(e^{-3/2} + \frac{3}{4} - 1\right); 8(e^{-2})[$

comme. $e^{3/2} \simeq 4,5 > 4$

d'où : $6\left(\frac{1}{e^{3/2}} - \frac{1}{4}\right) < 0$

alors : $0 \in]f(^3/_2), f(2)[$

d'où : 0 admet un seul antécédent on le note $\alpha \in]^3/_2, 2[$

c/c : $\boxed{\exists!\ \alpha \in]^3/_2, 2[: f(\alpha) = 0}$

$\boxed{2-d}$ $f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow 4\alpha\left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}}$ car : $\alpha > \frac{3}{2}$

3-a :

on a : f' continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ (produit de fct)

et $f'(0) = f'(1) = 0$

alors : d'après le Théorème de ROLL

$$\boxed{\exists x_0 \in]0,1[: f''(x_0) = 0}$$

3-b : Soit $x \neq x_0 \in [0,1]$

on a : f'' est continue, dérivable sur l'intervalle I d'extrémité x et x_0

d'après : T.A.F

$\exists c \in I$ tq : $f^{(3)}(c) = \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$

$= \dfrac{f''(x) - 0}{x - x_0}$

On : $f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x}$ (calcule)

d'où : $f^{(3)}(c) = (3-c)e^{-c} > 0$

car c dans l'intervalle I d'ext x et x_0, $I \subset [0,1]$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall x \in [0,1],\ x \neq x_0 ;\ \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0}$$

3-c :

on a : $\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$

d'où : f'' s'annulle en $x = x_0$ avec changement de signe

alors : $I(x_0, f(x_0))$ est un pt d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$

4-a les branches infinies

on a : $\cdot \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

$\cdot \lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.

$D_f = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} e^{-x} + \dfrac{x}{2} - 1$

$= +\infty$ car : $\lim\limits_{+\infty} e^{-x} = 0$

alors : $(\mathcal{C}_f)$ admet un branche parabolique de direction (oy), au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{-\infty} e^{-x} + \dfrac{x}{2} - 1$

$= ~~\infty~~$ ~~car lim e^-x~~

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}\left(1 + \dfrac{xe^{x}}{2} - e^{x}\right)$

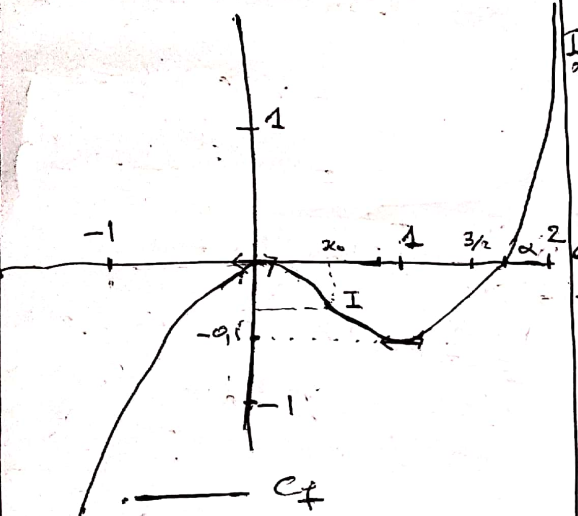
$= +\infty$

car , $\lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0$, $\lim\limits_{-\infty} xe^{x} = 0$

d'où :

$(\mathcal{C}_f)$ admet 1 branche parabolique de direction (oy) au vois de $-\infty$

4-b : représentation graphique



- $f(0) = f(\alpha) = 0$, $\alpha \in]\frac{3}{2}, 4[$
- $f'(0) = f'(1) = 0$, $f(1) = -\frac{1}{2}$

5-a :

d'après le Tableau de variation on a

- $\forall x \in]-\infty, 0]$: $f(x) \leq 0$.
- $\forall x \in [0, \alpha[$: $f(x) \leq 0$

$\boxed{\text{d'où } \forall x \in]-\alpha, \alpha] : f(x) \leq 0}$

5-b :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\alpha 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)dx$$

$$= \int_0^\alpha 4xe^{-x} + 2x^2 - 4x\,dx$$

on a :

$$\int_0^\alpha 4xe^{-x}\,dx = \left[4xe^{-x}\right]_\alpha^0 + \int_0^\alpha 4e^{-x}$$

$$= -4\alpha e^{-\alpha} + \left[4.e^{-x}\right]_\alpha^0$$

$$= 4 - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1)$$

d'où :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1) + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2$$

on : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}(2-\alpha)$.

conclusion : (calcule)

$$\boxed{I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3)}$$

déduction :

comme : $\forall x \in [0, \alpha] : f(x) \leq 0$

d'où : $\int_0^\alpha f(x)\,dx \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 < 3$

$\Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$

on : $\alpha > 2$

$\boxed{\text{d'où : } \alpha \in]2, \sqrt{3}[}$

$\boxed{\text{5-d}}$

$$l'\text{aire} = \int_0^\alpha |f(x)|\,dx \text{ u.a}$$

$$= -\int_0^\alpha f(x)\,dx \text{ . u.a}$$

$$\boxed{l'\text{aire} = \frac{2}{3}\alpha(3-\alpha^2)\text{ . cm}^2}$$

Partie II : on définie :

$u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, $u_0 < \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1-a :

pour $n=0$, $u_0<\alpha$.

Supposons que : $u_n<\alpha$, Montrons que $u_{n+1}<\alpha$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$.

$u_n<\alpha \Rightarrow f(u_n)\le 0$ (I-5-a) (H.R)

$\Rightarrow f(u_n)+u_n \le u_n \le \alpha$

$\Rightarrow f(u_n)+u_n\le\alpha$

$\Rightarrow u_{n+1}\le\alpha$ CQFD

$\boxed{C/c : \forall n\in\mathbb{N} : u_n\le\alpha}$

1-b :

On a : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$

On : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n\le\alpha$.

d'après : I-5-a : $f(u_n)\le 0$

conclusion : $u_{n+1}-u_n\le 0$

$\boxed{C/c : (u_n) \text{ est décroissante}}$

2-a : Supp que $0<u_0<\alpha$.

$g(x)=e^{-x}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$.

g est dérivable sur IR, comme somme de fct dérivables

alors : $g'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{2}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\ln 2>0$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(\ln 2)$	$\nearrow$	

On a : $\forall x\in IR : g(x)\ge g(\ln 2)$

Or $g(\ln 2)=e^{-\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{4}$

$=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

$=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}>0$.

Car : $\ln 2=0{,}69>1/2$.

Conclusion $\boxed{\forall x\in IR : g(x)>0}$

2-b :

On a : $f(x)+x=4x(e^{-x}+\frac{x}{2}-1)+x$

$=\cancel{x(4e^{-x}+\frac{4x}{2}-\frac{3}{4})}$

$=4x(e^{-x}+\frac{x}{2}-1+\frac{1}{4})$

$\boxed{f(x)+x=4x\,g(x)}$

Rq : dans l'énoncé il y'a 1 faute

$f(x)+x=x\,g(x)$ doit remplacer par : $f(x)+x=4x\,g(x)$ ⚠

C/c : $\boxed{f(x)+x=4x\,g(x)}$

On a : $u_0\ge 0$.

Pour $n=0$, $u_0\ge 0$

Supp que : $u_n\ge 0$, Montrons $u_{n+1}\ge 0$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1}=f(u_n)+u_n=4u_n\,g(u_n)$

comme : $\forall x\in IR$ $g(x)>0$

alors : (H.R) $\Rightarrow u_{n+1}=4u_n\,g(u_n)\ge 0$

d'où : $u_{n+1}\ge 0$

conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} : u_n\ge 0}$

2-c :

on a : • $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq 0$
• (U_n) décroissante

alors : (U_n) décroissante, minorée par 0

$\boxed{\text{d'où : } (U_n) \text{ est convergente}}$

2-d

on a : $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$
$= h(U_n)$

avec : $h(x) = f(x) + x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

et on a : $0 \leq U_n \leq U_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$.

$x \to h(x)$ est continue sur $[0, \alpha]$.

alors : $\lim U_{n+1} = \lim h(U_n)$
$= \lim f(U_n) + U_n$.

$\Leftrightarrow \quad \ell = f(\ell) + \ell$

$\Rightarrow \quad f(\ell) = 0$

or d'après l'étude et la représentation de f

on a : $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$

or : $U_n \leq U_0 < \alpha$

$\Rightarrow \lim U_n = \ell \leq U_0 < \alpha$

conclusion :

$\boxed{\lim U_n = 0}$

3 : on suppose que : $U_0 < 0$

3-a ; on a :

$U_{n+1} - U_n = f(U_n)$.

comme : (U_n) est décroissante

alors : $U_n \leq U_0 < 0$

et f croissante sur $]-\infty, 0]$

d'où : $f(U_n) \leq f(U_0)$

$\boxed{\text{c/c : } U_{n+1} - U_n \leq f(U_0)}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

3-b

Pour $n = 0$; $U_0 \leq U_0$

Supp que : $U_n \leq U_0 + n f(U_0)$

Montrons que : $U_{n+1} \leq U_0 + (n+1) f(U_0)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $U_{n+1} \leq U_n + f(U_0)$ (3-a)

$\overset{(H.R)}{\leq} U_0 + n f(U_0) + f(U_0)$

$\leq U_0 + (n+1) f(U_0)$

$\boxed{\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_0 + n f(U_0)}$

3-c : $U_0 < 0 \Rightarrow f(U_0) < f(0) = 0$

$\Rightarrow f(U_0) < 0$

d'où : $\lim U_0 + n f(U_0) = -\infty$

conclusion

$\boxed{\lim U_n = -\infty}$

Fin

SAID IBN JAA