المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⵏⴰⵍⴰⵏ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2018

-الموضوع-

RS25

★★

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و " ب " (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques ....(3.5 pts)

- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes ....(3.5 pts)

- L'exercice3 se rapporte au calcul des probabilités ....(3 pts)

- Lexercice4 se rapporte à l'analyse ....(10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE 1 (3.5points) :

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.5 2- a) Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.25 b) Montrer que l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est de dimension 2

0.25 3-a) Montrer que E est stable pour la loi "$\times$"

0.5 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif .

4- On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par : pour tout $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de $M_2(\mathbb{R})$,

$$M(x,y)TM(x',y')=M(x,y)\times M(x',y')-M(y,0)\times M(y',0)$$

Et soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E qui à tout nombre complexe $x+iy$ (où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) fait correspondre la matrice $M(x,y)$ de E

0.25 a) Montrer que E est stable pour la loi "T"

0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T)

0.25 c) On pose : $E^*=E-\{O\}$. Montrer que (E^*,T) est un groupe commutatif.

0.5 5- a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi « + » dans E

0.25 b) Montrer que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 2 :(3.5points)

1- Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ on pose : $h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

0.5 a) Vérifier que : $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 2 = 0$

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\mathrm{Re}(a) = 1$

Et pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i, a, b\}$ on note $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$ les points d'affixes respectivement $z, h(z), a$ et b

0.75 a) Montrer que : $\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = -\frac{z-a}{z-b}$

0.75 b) En déduire que : $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ $[2\pi]$

0.5 3- a) Montrer que si M, A et B sont alignés alors M, A, B et M' sont alignés.

0.5 b) Montrer que si M, A et B ne sont pas alignés alors M, A, B et M' sont cocycliques.

EXERCICE 3 :(3points)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face « pile ».

(le nombre de fois d'apparition de la face « pile » divisé par 10)

1 1-a) Déterminer les valeurs prise par X

1 b) Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$

1 2- Quelle est la probabilité de l'évènement : X supérieur ou égale à $\frac{9}{10}$?

EXERCICE 4 :(10points):

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2 \text{ pour } x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=0$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

(On pourra remarquer que : $f(x)=\left(4x^{\frac{1}{4}}\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$)

0.75 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.75 2- a)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0.75 b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

1 c)Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$, en déduire que :

$$(\forall x\in]0,1]) \qquad 0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le\left(\frac{4}{e}\right)^2$$

0.5 d) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé.(On prendra pour unité 2cm)

3- Pour tout réel $x\ge0$, on pose $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

0.5 a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$

1 b) Calculer $F'(x)$ pour $x\ge0$, en déduire le sens de variation de F sur $[0,+\infty[$

0.75 4- a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_x^1\sqrt{t}\ln t.dt$ pour tout $x>0$

0.75 b) Montrer que pour $x>0$, $F(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x-\frac{16}{27}x\sqrt{x}+\frac{16}{27}$

1 c) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x=0,\ x=1\ \ et\ \ y=0$

5- Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$

1 a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée et strictement monotone.

0.75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

FIN