

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2013

الموضوع



RS25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإختبار	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
 - L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
 - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
 - Le deuxième exercice se rapporte au calcul des probabilités
 - Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
 - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
 - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISÉ

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Exercice1 : (3,5 points) les parties I et II sont indépendantes

I- Pour tout x et y de l'intervalle $G =]1, 2[$ on pose : $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$

0.5 1-Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G

2-On rappelle que $(\square_+, *)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application f de \square_+ vers G définie par : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

0.75 a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\square_+, *)$ dans $(G, *)$

0.5 b) En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

II-On rappelle que $(M_3(\square), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et l'unité est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_3(\square), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel

et on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0.5 1-a) Vérifier que : $A^3 = O$ et en déduire que A est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\square), +, \times)$

0.5 b) Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ en déduire que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(M_3(\square), +, \times)$ que l'on déterminera.

0.75 2-Pour tout a et b de \square on pose : $M(a, b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$$

Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

Exercice2 : (3points)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I- On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne . et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 1- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.5 2- Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

II-On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

Etape 1 : On tire une boule de l'urne , on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

Etape 2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1

Etape 3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2

On considère les évènements suivants :
 N "la boule tirée à l'étape 1 est noire"
 R "la boule tirée à l'étape 1 est rouge"
 E "toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires "

- 0.5 1) Montrer que : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$
 0.5 2) Calculer $p(E)$
 0.5 3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est réalisé.

Exercice 3 : (3.5points)

I- Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation : $(E): 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

- 0.5 1) Montrer que : $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ sont les deux solutions de l'équation (E)
 0.5 2) On prend $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$
 0.5 a- Montrer que : $a - 1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$
 1 b- En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2

II- Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On admet que $\text{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$

- 0.5 1) Déterminer en fonction de a , les affixes des points J et K milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$
 2) Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'
 0.5 Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$
 0.5 3) Calculer $\frac{a' - c'}{a - 1}$ et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$

Exercice 4 : (8.25 points)

1- Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 0.5 a) Montrer que f est continue à droite au point 0, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 0.5 b) Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0 (On pourra utiliser le résultat $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$)
 0.5 c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$
 0.5 d) Donner le tableau de variation de la fonction f

2- Soit F la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
 et soit (C_F) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.25 a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$

0.5 b) Montrer que : $(\forall t \geq e) ; t \ln t \leq \sqrt{1+t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$

0.75 c) Montrer que : $(\forall x \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)$

0.5 d) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

0.5 e) Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

1 f) Construire (C_F) (on prend $F(1) \square 0,5$ et $F\left(\frac{1}{e}\right) \square 0,4$)

3- Pour tout x de $[0, +\infty[$ on pose : $\varphi(x) = x - F(x)$

0.75 a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et étudier les variations de φ

0.5 b) Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $\varphi(x) = n$ admet une seule solution α_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$

0.5 c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$ puis calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0.5 4-a), Montrer que : $(\forall n \geq 1) ; 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0.5 b) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

Exercice 5 : (1.75 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$

0.25 1- Vérifier que : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$

2- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

0.5 $(\forall n \geq 1) (\exists c \in]n, n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0.5 3- Montrer que : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$

0.5 4- Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$