

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
الموضوع



NS25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الاجتياز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة، أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte trois exercices et un problème indépendants deux à deux.
- Les exercices et le problème peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le problème se rapporte à l'analyse.

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Exercice1 : (3,5pts)

On rappelle que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

1- On munit \mathbb{Z} de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) ; x * y = x + y - 2$$

- 0.5 a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
0.25 b) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
0.5 c) En déduire que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif.

2- On munit \mathbb{Z} de la loi de composition interne T définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) ; xTy = xy - 2x - 2y + 6$$

et on considère l'application f de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} définie par : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = x + 2$

- 0.5 a) Montrer que l'application f est un isomorphisme de (\mathbb{Z}, \times) dans (\mathbb{Z}, T)
0.25 b) Montrer que : $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3) ; (x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$

0.75 3- En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z}, *, T)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4-a) Montrer que : $xTy = 2$ si et seulement si $(x = 2$ ou $y = 2)$

0.25 b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, *, T)$ est intègre.

0.25 c) $(\mathbb{Z}, *, T)$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

Exercice2 : (3,5pts)

I- Soit a un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$

0.25 1- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$

0.5 2- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

II- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On considère les points A , B et M d'affixes respectifs a , $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et z

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On pose $A_1 = r^{-1}(A)$ et $B_1 = r(B)$ (r^{-1} désigne la rotation réciproque de r)

et soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1

0.5 1- Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0.5 2- a) Montrer que : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0.5 b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3- On suppose que : $M \neq A$ et $M \neq B$

0.5 a) Montrer que : $\frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{z - b}{z - a} \times \frac{a}{b}$

0.75 b) Montrer que M , A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si M , O , A et B sont cocycliques.

Exercice3 :(3pts)

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : $(R) : 3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$

1-On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p **le plus petit diviseur premier positif** de n .

0.75 a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{p}$, en déduire que $p \geq 5$

0.5 b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 c) Montrer qu'il existe un couple (a, b) de \mathbb{Z}^2 tel que : $an - b(p-1) = 1$

0.5 d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$

$$(a = q(p-1) + r \text{ avec } 0 \leq r < p-1 \text{ et } q \in \mathbb{Z})$$

Montrer qu'il existe **un entier naturel** k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

0.75 2- En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R)

Problème :(10pts)

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \text{ et } (\forall x > 1); h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$$

Première partie :

0.25 1-a) Montrer que la fonction h est continue à droite en 1

0.75 b) Montrer que : $(\forall x > 1); \ln x < x-1$, en déduire que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$

0.5 2-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ puis donner le tableau de variations de h

0.25 b) En déduire que : $(\forall x \geq 1); 0 < h(x) \leq 1$

Deuxième partie :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$g(1) = \ln 2 \text{ et } (\forall x > 1); g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall x > 1); \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

0.25 b) Vérifier que : $(\forall x > 1); g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$

0.5 c) Montrer que : $(\forall x > 1); g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$

- 0.5 2-a) Montrer que : $(\forall x > 1) ; (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$
- 0.5 b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1
- 0.75 c) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$
- 0.75 3-a) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et que : $(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$
- 0.5 b) En déduire que : $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$, puis donner le tableau de variations de g
- 0.5 c) Construire la courbe (C)
- Troisième partie :**
- 0.5 I-1- Montrer que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ dans l'intervalle $] -\infty, \ln 2]$
- 0.25 2- En déduire qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, +\infty[$ qui vérifie : $1 + g(\alpha) = \alpha$
- II- On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :
- $$1 \leq u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \geq 0) ; u_{n+1} = 1 + g(u_n)$$
- 0.5 1- a) Montrer que : $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$
- 0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.
- 0.75 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$
- 0.5 2-a) Montrer que : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$
- 0.25 c) En déduire une deuxième fois, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

FIN