المادة	الرياضيات	NS25	المعامل 9
الشعب(ة) او المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		مدة الإنجاز 4

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

-Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
-Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices non programmables sont autorisées

Premier exercice :(4 points) **Les deux parties sont indépendantes.**

Première partie : Dans l'anneau $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0=I$ et $A^1=A$ et $A^2=A\times A$ et $A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout n de $\mathbb{N}$)

0.5 1-Montrer que : $(\forall k\in\mathbb{N})\quad A^{2k}=I$

0.5 2-Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Deuxième partie : Soit a un nombre réel.

Pour tout x et y de l'intervalle $I=]a,+\infty[$ on pose : $x*y=(x-a)(y-a)+a$

0.5 1-a)Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 c) Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 2-Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

3-On considère l'application : $\varphi:\ I\mapsto\mathbb{R}_+^*$

$$x\mapsto\frac{1}{x-a}$$

0.5 a)Montrer que φ est un isomorphisme de $(I,*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

0.5 b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)}=a^3+a$ où $x^{(3)}=x*x*x$

Deuxième exercice :(2.5points)

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N=\underbrace{11..........1}_{2010\ fois\ 1}$

0.25 1-Montre que le nombre N est divisible par 11

0.75 2-a)Vérifier que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010}-1=9N$

0.5 b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

0.5 c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

0.5 3- Montrer que le nombre N est divisible par 22121

Troisième exercice :(3.5points)

Première partie :Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (E_m) : $z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$

0.5 1-Vérifier que le nombre $z_1=-m+2$ est solution de l'équation (E_m)

2-Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)

0.5 a) Montrer que : $z_1z_2=1 \Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$

1 b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1z_2=1$

Deuxième partie : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère l'application S qui au point M, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z'-1=-(z-1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,et soit z'' l'affixe du point $M''=R(M)$.

0.25 1-a)Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1 .

0.25 b) Montrer que : $z''=iz+2$.

2-Soit A le point d'affixe 2.On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0.5 a)Calculer : $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0.5 b) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A,Ω,M' et M'' sont cocycliques.

Quatrième exercice:(6.5points)

Première partie : **Etude des solutions positives de l'équation (E) : $e^x=x^n$ avec n un entier naturel non nul.**

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 1- Vérifier que pour tout x de l'ensemble $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a : $e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)$

0.5 2- Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 .

1.5 3-Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0.75 4-Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0.5 5-Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0.5 6- Représenter graphiquement (C) .

0.5 7-Montrer que pour $n\geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1<a_n<e<b_n$

Deuxième partie : Etude des deux suites $(a_n)_{n\geq 3}$ et $(b_n)_{n\geq 3}$

0.5 1-Montrer que : $(\forall n\geq 3)\ \ b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$

0.5 2-a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\geq 3)\ \ \frac{1}{n} < ln(a_n) < \frac{e}{n}$, en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 3}$

0.5 c)Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = e$

Cinquième exercice :(3.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

0.5 1-a) Montrer que : $(\forall x\geq 0)\ \ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x\geq 1)\ \ \ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$

0.5 2-Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\geq 0)\ \ \ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

3-On considère la fonction numérique G définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x)\ \ ;\ \ 0\leq x < \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

0.25 a) Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

0.75 b) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $F'(c) = 0$

et que : $F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction G sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

4-On considère la fonction numérique H définie sur $]0,+\infty[$ par : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

0.5 a)Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

0.5 b) En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variation de F .

FIN