

## **LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

**Exercice1 :** soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution  $g$  qui vérifie :

$$g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 2$$

**solution :** ( $w = 2$ ) 1) la solution générale de

l'équation différentielle (E) est :

La fonction :  $F(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$  où  $a$  et  $b$  sont des réels

$$2) F'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

On peut écrire  $F(x)$  sous la forme :  $F(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

**Exercice2 :** Résoudre les équations différentielles suivantes : 1)  $(E_1): y' = 3y$  2)  $(E_2): y' - y = 0$

**Solution :** 1) La solution générale de l'équation différentielle  $(E_1)$ : est l'ensemble des fonctions :

$$x \rightarrow y(x) = \lambda e^{3x} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel.}$$

$$2) (E_2): y' - y = 0 \Leftrightarrow (E_2): y' = 1y$$

La solution générale de l'équation différentielle  $(E_2)$ : est

l'ensemble des fonctions :  $x \rightarrow y(x) = \lambda e^x$  où  $\lambda$  est un réel.

**Exercice3 :** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2y' - 4y - 3 = 0$$

**Solution :**  $(E) : 2y' - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y' = 4y + 3$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{4y + 3}{2} \Leftrightarrow y' = 2y + \frac{3}{2}$$

$$\text{on a donc ; } a = 2 \text{ et } b = \frac{3}{2}$$

La solution générale de l'équation différentielle (E) : est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{3}{4} \quad \text{Où } \lambda \text{ est un réel.}$$

**Exercice4 :** soit l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \frac{1}{2} y' + 3y - 1 = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution  $f$  de (E)

Telle que  $f'(0) = -2$ .

**Solution :** 1)  $(E) : \frac{1}{2} y' + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' = -6y + 2$

$$\text{Donc : } a = -6 \text{ et } b = 2$$

La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-6x} + 3 \quad \text{Où } \lambda \text{ est un réel.}$$

$$2) f(x) = \lambda e^{-6x} + 3 \quad \text{On va calculer : } f'(x)$$

$$f'(x) = (\lambda e^{-6x} + 3)' = -6\lambda e^{-6x}$$

$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow -6\lambda e^0 = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Donc :  $f(x) = \frac{1}{3} e^{-6x} + 3$  c'est la solution de (E) qui vérifie la condition initiale

**Exercice5 :** Considérons les équations différentielles

$$(E_0): y' - y = 0 \text{ et } (E) : y' - y = 2x^2 + x$$

1- Résoudre l'équation différentielle  $(E_0)$

2- a) Soit  $P$  une fonction polynôme, quel sera le degré de  $P$  afin que  $P$  soit une solution de (E)

b) Déterminer le polynôme  $P$  pour que  $P$  soit une solution de (E)

c) Montrer que :  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $(y - P)$  est solution de (E)

d) En déduire la solution générale de l'équation (E)

3) déterminer la solution  $\varphi$  de (E) telle que  $\varphi(0) = 2$

**Exercice6 :** 1) Résoudre l'équation différentielle

$$\text{suivante : } (E) : y'' - 7y' + 12y = 0$$



2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$

Telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$

**Solution :1)** l'équation Caractéristique de  $(E)$  est :

$$(E_1): r^2 - 7r + 12 = 0$$

On a :  $\Delta = 1$  donc l'équation  $(E_1)$  a deux racines :  $r_1$  et  $r_2$

réelles et distinctes :  $r_1 = 3$  et  $r_2 = 4$

Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions :

$$y(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$$

$$f'(x) = (\alpha e^{4x} + \beta e^{3x})' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc :  $f(x) = e^{4x} - e^{3x}$  c'est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales

**Exercice7 :1)** Résoudre l'équations différentielle

suivante :  $(E): y'' - 2y' + y = 0$

2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$

Telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$

**Solution :1)** l'équation Caractéristique de  $(E)$  est :

$$(E_1): r^2 - 2r + 1 = 0$$

On a :  $\Delta = 0$  donc l'équation  $(E_1)$  admet une racine double

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = 1$$

Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions :

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^x \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$$

$$f'(x) = ((\alpha x + \beta)e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta)(e^x)'$$

$$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Donc :  $f(x) = (1x + 0)e^x$  donc :  $f(x) = xe^x$

C'est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales.

**Exercice8 :1)** Résoudre l'équations différentielle

suivante :  $(E): y'' - 4y' + 13y = 0$

2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$

Telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$

**Solution :1)** l'équation Caractéristique de  $(E)$  est :

$$(E_1): r^2 - 4r + 13 = 0 \text{ On a : } \Delta = -36 = (6i)^2$$

donc l'équation  $(E_1)$  a deux racines  $z_1$  et  $z_2$  complexes

$$\text{conjugués et on a: } z_1 = \frac{4+i6}{2} \text{ et } z_2 = \frac{4-i6}{2} \text{ donc}$$

$$z_1 = 2 + 3i = p + iq$$

Donc les solutions de l'équation  $(E)$  sont les fonctions :

$$y(x) = e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

$$2) f(x) = e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)$$

$$f'(x) = (e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x))'$$

$$= (e^{2x})' (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)'$$

$$= 2e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x} (-3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x} (2\alpha \cos 3x + 2\beta \sin 3x - 3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x} ((2\alpha + 3\beta) \cos 3x + (2\beta - 3\alpha) \sin 3x)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } f(x) = e^{2x} \left( 0 \times \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x$$

c'est la solution de  $(E)$  qui vérifie les conditions initiales

**Exercice9 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) y' = 7y - 5 \quad \text{avec } y(0) = -6$$



2)  $y'' - 15y' + 56y = 0$  avec :  $y'(0) = 9$  ;  $y(0) = -3$

3)  $y'' + 14y' + 49y = 0$  avec :  $y'(0) = 6$  ;  $y(0) = -3$

4)  $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$  avec :  $y'(0) = 6$  ;  $y(0) = -4$

**Solutions :** 1)  $y' = 7y - 5$  Donc les solutions de

l'équation (E) sont les fonctions :

$$y(x) = \lambda e^{7x} + \frac{5}{7} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

On a :  $y(0) = \lambda + \frac{5}{7} = -6$  donc :  $\lambda = -\frac{47}{7}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions

initiales est :  $y(x) = -\frac{47}{7}e^{7x} + \frac{5}{7}$

2)  $y'' - 15y' + 56y = 0$  avec :  $y'(0) = 9$  ;  $y(0) = -3$

L'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 - 15r + 56 = 0 \text{ donc : } r_1 = 7 \text{ et } r_2 = 8$$

Donc :  $y(x) = \alpha e^{7x} + \beta e^{8x}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  réels

Donc :  $y'(x) = 7\alpha e^{7x} + 8\beta e^{8x}$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha + \beta \\ y'(0) = 7\alpha + 8\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 9 \end{cases}$$

Donc :  $\begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ 7\alpha + 8\beta = 9 \end{cases}$  donc :  $\beta = 30$  ;  $\alpha = -33$  Donc : la

solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est :

$$y(x) = -33e^{7x} + 30e^{8x}$$

3)  $y'' + 14y' + 49y = 0$  avec :  $y'(0) = 6$  ;  $y(0) = -3$

L'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 + 14r + 49 = 0 \text{ donc : } r = -7$$

Les solutions :  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$   $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-7x}$

$$y'(x) = \alpha e^{-7x} - 7(\alpha x + \beta)e^{-7x}$$

$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \beta \\ y'(0) = \alpha - 7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha - 7\beta = 6 \end{cases}$$

Donc :  $\alpha = -15$  ;  $\beta = -3$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions

initiales est  $y(x) = (-15x - 3)e^{-7x}$

4)  $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$  avec :  $y'(0) = 6$  ;  $y(0) = -4$

L'équation Caractéristique de l'équation est :

$$r^2 + r + \frac{5}{2} = 0 \text{ on trouve : } z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ et } \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Donc :  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$   $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( \alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$

où  $\alpha$  et  $\beta$  réels

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left( \alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

$$+ \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left( -\alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

$$\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$$

Donc :  $\alpha = -4$  ;  $\beta = \frac{8}{3}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions

initiales est

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( -4 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

**Exercice10 :** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)  $2y'' + y' - 3y = 0$       2)  $y'' + 2y' + 2y = 0$

3)  $y'' + 4y' + 4y = 0$       4)  $y'' + 2y = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien

