Partie (1) soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = -x\ln x \quad ; \quad x>0 \text{ et } f(0)=0$$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$

1) a) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

b) étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation

2) a) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ) $y = x$

b) tracer la courbe (C_f)

3) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = e^{-2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $0 < U_n < e^{-1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ est croissante ; déduire qu'elle est convergente

c) déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Partie (2) soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$

1) montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions a_n et b_n ($a_n < b_n$)

2) a) montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

b) montrer que $(\forall n > 2)$ $a_n < \dfrac{1}{n}$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

3) a) montrer que $(\forall x > 2)$ $2\ln x < x$ puis déduire $(\forall n \geq 3)$ $\dfrac{1}{n^2} < a_n$

b) montrer que $(\forall n \geq 3)$ $\dfrac{\ln a_n}{\ln n} \geq -1 - \dfrac{\ln 2}{\ln n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}$

et déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln a_n}{\ln n} = -1$

4) a) montrer que $(b_n)_n$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$

b) montrer que $(\forall n > 2)$ $(\exists c \in [b_n,1])$ $\dfrac{b_n - 1}{\ln b_n} = c$

c) déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(b_n - 1) = -1$

Partie (3) soit n un entier naturel . on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$

$$\text{Par : } \begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1} & : \ x\in]0,1[\\ f(0) = 0 \quad ; & f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) montrer que f_n est continue sur $[0,1]$

2) g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g_n(x) = x^{2n+1}\ln x$; $x \neq 0$ et $g_n(0) = 0$

Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

3) on pose $U_n(x) = \displaystyle\int_x^1 g_n(t)\,dt$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$ $U_n(0) = \displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} U_n(x)$

a) calculer $U_n(x)$ pour x de $]0,1[$ et déduire $U_n(0) = -\dfrac{1}{4(n+1)^2}$

b) calculer en cm^2 l'aire du domaine limite par (C_f) ; les axes du repère et $x = 1$

4) on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $I_{n+1} - I_n = U_n(0)$

b) étudier le sens de variation de la fonction $\varphi(x) = -x + \dfrac{1}{x} + 2\ln x$

c) déduire que $(\forall x\in]0,1[)$ $0 < \dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$

5) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k^2}$

a) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n}$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $I_0 = I_n + \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k^2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$