Institut Scolaire les Palmiers	Contrôle continu 5 (S1) 13 Décembre 2019	2ème bac SM Durée : 2 Heures

Exercice 1 (5,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$$

1 1) a) Dresser le tableau de variations de f_n

1,5 b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n sur $\mathbb{R}^+$ puis vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $0 < \alpha_n < \ln 2$

1 2) a) Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^n(\alpha_n - 1)$

1 b) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ puis déduire qu'elle est convergente

1 c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 2 (14,5 points)

I) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + (x-1)e^x + 1$

0,5 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

1,5 b) Déterminer les branches infinies de la courbe (C_g)

1 2) a) Montrer que g est dérivable sur I puis calculer $g'(x)$ pour x de I

0,5 b) Dresser le tableau de variations de g

1 3) a) Démontrer que : $\forall x \in]0,1]$ $g(x) \leq x$ et que $(\forall x \in]1,+\infty[)$ $g(x) > x$.

1 b) Construire la courbe (C_g) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 II) 1) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

1 b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $(g^{-1})'(1)$.

2) Soit la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$ $(n \in \mathbb{N})$

0,5 a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 1$

1 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente puis calculer sa limite

1 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}\right)$

III) Soit la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x + (x-2)e^{x} - x & \text{si } x>0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$$

1 1) a) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter

1 géométriquement le résultat obtenu.

0,5 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.

1 c) Dresser le tableau de variations de f.

d) Donner en justifiant votre réponse, le nombre de solutions

1 de l'équation dans $]0,+\infty[$: $1+x\ln x = (x-2)(1-e^{x})$.