Institut Scolaire les Palmiers | [illegible] 01 Novembre 2019 | $2^{\text{ème}}$ bac SM Durée : 2H

Exercice 1 (5 points)

① Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $[0;1]$ telles que : $f(0)=0$, $f(1)=\frac{\pi}{4}$; $g(0)=0$; $g(1)=1$ et $(\forall x \in]0;1[)\ g'(x) \neq 0$

2 Montrer que : $(\exists \alpha \in]0;1[)\ /\ \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \dfrac{1}{1+g^2(\alpha)}$.

② En utilisant le théorème des accroissements finis, prouver

2 que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\quad \dfrac{x}{1+(x^2+x+1)^2} < \operatorname{Arctan}(x^2+x+1) - \operatorname{Arctan}(x^2+1) < \dfrac{x}{1+(x^2+1)^2}$

1 Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\operatorname{Arctan}(x^2+x+1) - \operatorname{Arctan}(x^2+1)\right)$

Exercice 2 (15 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{x^2-2x}$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 3x\sqrt[3]{x} + 2x^2 - 8x$ si $x > 0$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 1) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty;+\infty[$

2,5 b) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en zéro puis interpréter géométriquement les résultats obtenus

1 c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1 d) Déterminer les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

1 2) a) Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

1,5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = 4(\sqrt[3]{x} + x - 2)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)\ f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

1,5 c) Déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

1 3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]2;3[$ (on donne : $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$ et $\sqrt[3]{3} \simeq 1,44$; $\alpha \simeq 2,1$)

1,5 b) Construire la courbe (C).

1 4) a) Montrer que $(\forall x \in [-2;-1])\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0,5 b) Déduire que $(\forall x \in [-2;-1])\quad |f(x) - \pi/3| \leq \frac{1}{2}|x+1|$

5) Soit g la réstriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;0]$

0,5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on donnera.

1 b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour x de J