nisse

Contrôle : n° 3

matière : maths durée :2h

Exercice : 1

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère l'equation : (E)

$z^2 + [(1-a)i - a]z + a + a^2 i = 0$

1-a) Montrer que $\Delta = [(1+a)i - a]^2$

b) Resoudre dans $\mathbb{C}$ (E).

2- Montrer que l'equation admet une seule solution $\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3- Supposons que $a \neq -1$; $a \neq -i$; $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Soient $A(a)$, $B(ai)$, $C(a-i)$, $D(-i)$

a- Montrer que A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{3\pi}{4} [\pi]$

b- Montrer que A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ et $|a| = 1$

4- On pose $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Soit R la rotation de centre D telle que $R(C) = B$.

Determiner l'angle de la rotation R.

Exercice : 2

on considère l'application : $F : \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M(z) \longmapsto M(z') \end{array} / \; z' = (1+i)z - i$

1- Montrer que : F admet un seul point invariant A.

2- Montrer que : $AM' = \sqrt{2}\, AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

3- Montrer que : AMM' est un triangle rectangle.

Exercice : 3

1- Resoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-i)^5 = i(z+i)^5$

2- Montrer que l'equation $z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $a \in \mathbb{C}$ admet deux solutions z_1 et z_2 alors :

$\arg z_2 + \arg z_1 \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

et $|z_1| \times |z_2| = 1$