Inisse Groupe scolaire 2017-2018

Matière: Mathèmatiques — Contrôle N° 3 — 1 Semestre

Le 27/12/2017 — 2 Bac - SM- — Durée: 2h00

Partie I :

$f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x}$, $x > 0$ et $f(x) = -x + \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$, $x \leq 0$

1 - Mq $D_f = \mathbb{R}$.

2 - Etudier la continuité de f en 0.

3 - Etudier la dérivabilité de f en 0.

4 - Calculer $f'(x)$ et dresser le T.V de f sur $\mathbb{R}$

5 - Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

6 - Construire $\mathcal{C}_f$.

Partie II :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} (f'(x))^n \, dx$

1 - Mq $\forall x \in [\ln 2, 0]$, $-\frac{3}{5} < f'(x) \leq 0$

2 - En déduire que $|U_n| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \ln 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

et calculer $\lim\limits_{+\infty} U_n$.

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$

par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$

1 - Mq $\forall x \in]0, e^2[$: $0 \leq F(x) \leq \sqrt{x}\, f(\sqrt{x})$

2 - En déduire que F est dérivable en 0 à droite.

3 - Mq F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que

$\forall x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{2(\sqrt{x} - \ln\sqrt{x})}$.

4 - Mq $\forall t \geq 1$, $1 + \dfrac{\ln(t)}{t} \leq f(t) \leq 1 + \ln(t)$

5 - En déduire que : $\forall x > 1$

$\sqrt{x} - 1 + \dfrac{(\ln\sqrt{x})^2}{2} \leq \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} f(t)\,dt \leq \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$

6 - Calculer $\lim\limits_{+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

7 - Mq $F''(x)$ a le même signe que $1 - x$ sur $]0; +\infty[$.

8 - Construire $\mathcal{C}_F$

on donne $F(1) \simeq 0{,}3$

l'unité est : 2cm.