Exercice 1 (2,5 points)

Soit la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f(x) = \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1 1) a) Montrer que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.

0,5 b) Déduire que $(\forall x \in I)$ $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

1 2) Déduire de ce qui précède la valeur de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{2020}{2018}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2019}\right)$.

Exercice 2 (10 points)

I) Soit la fonction g définie sur $I = [-2; +\infty[$ par : $g(x) = 4x\sqrt{x+2} - 1$

1 1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

1,5 b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans I puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

1 c) En utilisant la méthode de dichotomie, donner l'encadrement de α d'amplitude $0,25$.

0,5 2) Dresser le tableau de signes de la fonction g.

II) On considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = 2 + \sqrt{x+2} - x^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C_f).

1 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0,5 2) a) Montrer que $(\forall x \in]-2; +\infty[)$ $f'(x) = \frac{-g(x)}{2\sqrt{x+2}}$

0,5 b) Calculer $f'(\alpha)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1,5 c) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha) = \frac{-4\alpha^3 + 8\alpha + 1}{4\alpha}$

1,5 d) Construire la courbe (C_f) (on donne $\alpha \simeq 0,16$ et $f(\alpha) \simeq 3,4$; $f(2) = 0$; $f(-1) = 2$)

Exercice 3 (7,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}\right)$

0,75 1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

0,75 b) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0

2)

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout x de $]0;+\infty[$:

1,5 $$f'(x)=\frac{2(\sqrt[3]{x}-1)}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1+(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})^2\right)}$$

,5 b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$:

,5 c) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

5 d) Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 8 .

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$

5 a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on donnera.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\pi/4;\pi/2[$ puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

5 c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour x de J.