Exercice (1)

Soit n un entier supérieur à 2 .

on considère la fonction f_n définie sur $I = \left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = arcatn\left(\sqrt[n]{\tan x}\right) & ; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} & \\ f_n(x) = \frac{x}{\sqrt[n]{1-x}} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

1) a) étudier la continuité de f_n sur I

b) étudier la dérivabilité de f_n à droite et à gauche de 0

c) étudier la dérivabilité de f_n à gauche de $\frac{\pi}{2}$

d) soit x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ calculer $f_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f_n(x)$

interpréter le résultat géométriquement

2) étudier la branche infinie de la courbe $\left(C_{f_n}\right)$ en $-\infty$

3) a) calculer la dérivée de f_n sur chacun des intervalle $]-\infty, 0[$ et $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) montrer que f_n réalise une bijection de I vers I

c) déterminer $f_2^{-1}(x)$ pour tout x de I

4) a) résoudre dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $f_n(x) < x$

b) tracer dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes de f_2 et f_2^{-1}

5) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{\pi}{3}$ et $U_{n+1} = f_2(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite

6) a) montrer que $(\exists! a_n \in I)$ $f_n(a_n) = 1$

b) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $a_n > \frac{\pi}{4}$ en déduire que $(\forall n \geq 2)$ $a_n > 1$

c) montrer que $(\forall x > 1)$ $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n+1]{x}$

puis comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

d) étudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ et déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite

Exercice (2)

on considère la suite $(V_n)_{n>2}$ définie par : $V_n = \sqrt[n]{n}$

1) a) montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 3)$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$

b) en déduire que $(V_n)_{n>2}$ est strictement décroissante et convergente

2) a) montrer que $(\forall a > 0)(\forall n \geq 2)$ $(1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2)$ $\sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n$

Bonus

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 = 0$