ذ : المانتي	**Devoir 1**	**2$^{\text{ème}}$ bac sm**

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\sqrt[6]{x}$	$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3}$
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt{2-x}-1}$	$a>0$; $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sqrt[3]{a}-a\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x}-a\sqrt[4]{a}}$

Exercice 2

Soient a et b deux réels .

On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x)=x^2-bx & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=a-\dfrac{2}{x} & ; \quad 2<x\le 4 \\ f(x)=\sqrt{x+5} & ; \quad x>4 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}-\{2;4\}$

2) déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x)=\arctan\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^3\right)$$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

2) montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera

3) calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J □

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- l'équation $g(x)=x$ admet deux solutions a et b avec $a<0<b$

- $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)<x$

Montrer que $(\exists \alpha\in\mathbb{R})\quad f(\alpha)g(\alpha)=\alpha^2$

Exercice 5

1) soit k un entier supérieur ou égal à 2 . calculer $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^k-1}{t-1}$

2) Soit $a\in\mathbb{R}^*$ montrer que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1-\dfrac{ax}{n}}{x^2} = -\dfrac{(n-1)a^2}{2n^2}$ (poser $t=\sqrt[n]{1+ax}$)

3) déduire la limite $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1-3x}-1}{x^2}$

4) soit h la fonction telle que $h(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-3x}-2x}{x^2}$; $x\ne0$ et $h(0)=\dfrac{1}{2}$

a) déterminer D_h et étudier la continuité de h sur $D_h-\{0\}$

b) montrer que h est continue sur D_h