

CONTRÔLE N°1 DU 1^{er} SEMESTRE

Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{x}) \sqrt{x^2 - 2x + 2}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} \cdot \text{Arctan } x + \text{Arctan } \sqrt{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

9,5
2

- 1 - Etudier la continuité de f en 1
- 2 - Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter les résultats obtenus.

3 - On pose $U(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 6$

a - Etudier les variations de U sur \mathbb{R}

b - Montrer que $U(x) = 0$ admet une seule solution α dans \mathbb{R}

c - En déduire que $\alpha \in]-\sqrt{3}, -\frac{5}{3}[$ et déterminer le signe de $U(x)$ sur \mathbb{R}

4,5

4 - Mq $f'(x) = \frac{U(x)}{3x^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2}}, \forall x < 1$

1,5

5 - Déterminer $f'(x)$, $\forall x > 1$ et dresser le T.V de f sur \mathbb{R}

1,5

6 - a - Etudier les branches infinies de G_f au voisinage de $-\infty$

4,5

b - Mq $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 1$ est une asymptote de G_f " " $+\infty$

4,5

7 - Mq $f(x) \leq x - 1, \forall x \in [0, 1]$.

1

8 - Tracer G_f (on prend $f(1) = 1, 8$)

9 - Soit g la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$

a - Mq g est bijective de I vers un intervalle J à déterminer

b - Tracer $G_{g^{-1}}$

c - Mq g^{-1} est dérivable sur J et calculer $(g^{-1})'(0)$

Exercice 2

1 - Mq $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(\frac{1-x^2}{1+x^2}) + \text{Arctan } x^2 = \frac{\pi}{4}$

2 - En utilisant T.A.F :

a - calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x^2 + x - 1) + \frac{\pi}{4}}{x^2 + 3x}$

b - Mq $\frac{1}{(n+1)^{1-p}} \left[(n+1)^p - n^p \right] < \frac{1}{n^{1-p}}, \forall n \in \mathbb{N}^+, p \in]0, 1[$