	Dérivabilité	2016-2015

التمرين الأول

Etudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes

1) $\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $a = 0$

2) $\begin{cases} f(x) = \sin^2 x \ E\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et $a = 0$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & ; \ x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$

4) $\begin{cases} f(x) = \left|x^2 - x\right| & ; \ x < 0 \\ f(0) = x\sqrt{x} & ; \ x \geq 0 \end{cases}$ et $a = 0$

التمرين الثاني

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ f(x) = ax^2 + bx + 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1) déterminer la relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$

2) déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}^+$

التمرين الثالث

Calculer la dérivée de f dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$ 2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

3) $f(x) = \left(1 + \sin(2x)\right)^3$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$ 5) $f(x) = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

6) $f(x) = \tan(\sin x)$ 7) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}$

8) $f(x) = \sin\left(\arctan\left(\pi\sqrt{x}\right)\right)$

التمرين الرابع

1) Soit f une fonction dérivable en a .

calculer la limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

2) soit f une fonction dérivable au point $a = 2$

Telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.

Calculer les limites

$$\lim_{x \to 2} \frac{f\left(\sqrt{x+2}\right)}{x - 2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2} \frac{f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x - 2}$$

التمرين الخامس

On pose $I = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$

1) montrer que :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)$$

2) déduire que $\dfrac{\sqrt{2}}{12} \leq \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

التمرين السادس

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$; dérivable sur $]-2,1[$ telle que $f(0) = f(1) = f'_d(0) = 0$

montrer que : $\left(\exists c \in]0,1[\right) \quad f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$

التمرين السابع

1) soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$

montrer qu'il existe un nombre c de $]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

2) soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$

montrer qu'il existe un nombre d de $]a,b[$ tel que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c - b}{a} f''(d)$$