Exercice 1

Etudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes :

1) $f(x)=2x-\sqrt[3]{2-x}$ et $a=1$ 2) $f(x)=\sqrt{2+x}\cos(\pi x)$ et $a=-1$

3) $\begin{cases} f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}\right) & ; \quad x>2 \\ f(2)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ et $a=2$

Exercice 2

1) montrer que la fonction $g(x)=\sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$

2) on considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) montrer que f est dérivable en $a=0$

b) calculer la dérivée $f'(x)$. f' admet-elle une limite au point $a=0$?

Exercice 3

Soit f une fonction dérivable en $x_0=0$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{k=n} f(kx)}{x^n}=n!$

Exercice 4

Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $\left(\exists(m,M)\in\mathbb{R}^2\right)$ $(\forall x\in[a,b])$ $m\leq f'(x)\leq M$

1) montrer que $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$

2) montrer que $\left(\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right)$ $1+\dfrac{x}{\sqrt{6}}\leq\sqrt{1+x}\leq 1+\dfrac{x}{2}$

Exercice 5

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f_d^{/}(0)=f(1)=0$:

Montrer que $(\exists c\in\,]0,1[)$ $f'(c)=\dfrac{f(c)}{c}$

Exercice 6

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\begin{cases} f(0)=0 \quad ; \quad f_d^{/}(0)=0 \\ \left(\exists a\in\mathbb{R}^{+*}\right) \quad : \quad f(a)f'(a)<0 \end{cases}$

Montrer que $\left(\exists c\in\mathbb{R}^{*+}\right)$ $f'(c)=0$

Exercice 7

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$

Montrer que $(\exists c\in\,]a,b[)$ $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{2}f''(c)$

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit x_0 de $]a,b[$

Montrer que $(\exists c\in\,]a,b[)$ $f''(c)=\dfrac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$