Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x+\sin x} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2} E\left(\dfrac{1}{2x}\right) & ; \quad x < 0 \end{cases}$

1) montrer que f est dérivable à droite de $a = 0$

2) la fonction f est-elle dérivable en $a = 0$?

✍ étudier la dérivabilité de $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+4}-1}{\sqrt{x}+1}$ au point $x_0 = 4$

☞ étudier la dérivabilité de $f(x) = \sin^2 x \; E\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $f(0) = 0$ en $x_0 = 0$

Exercice 2

1) a) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

b) déduire la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^2}$

2) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$$

3) a) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x$$

b) démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

4) en utilisant le théorème des accroissement finis calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x}\right)$$

Exercice 3

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2+1} - x \geq 0$

b) exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$ que peut-on déduire ?

2) montrer que f est dérivable $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$

3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \; \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arctan x$

Exercice 4

On considère la fonction F définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x)=4x(\pi-x)-\pi\sin^2 x$

1) montrer que F est deux fois dérivable et que $F''(x)=-2(4+\pi\cos 2x)$

2) étudier le sens de variation de F' déduire le signe de $F'(x)$

3) en déduire ue $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ $\sin^2 x\le\frac{4}{\pi}x(\pi-x)$

Exercice 5

Soit h la fonction définie sur $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

1) montrer que h est une bijection de D vers J à déterminer

2) montrer que h^{-1} est dérivable sur J et on a $(\forall x\in J)$ $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

3) en déduire que $(\forall x\in J)$ $h^{-1}(x)=2\arctan(x)-\frac{\pi}{2}$

Exercice 6

G est la fonction définie sur $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x)=\sin x$

1) montrer que G est bijective de I vers J que l'on déterminera

2) montrer que G^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\left(G^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) on pose $h(x)=2G^{-1}\left(\sqrt{x}\right)-G^{-1}(2x-1)$

a) montrer que le domaine de h est $D=[0,1]$

b) montrer que h est dérivable sur $]0,1[$ puis calculer la dérivée $h'(x)$

c) calculer $G^{-1}(1)$ et déduire que $(\forall x\in[0,1])$ $2G^{-1}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{2}+G^{-1}(2x-1)$

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

1) montrer que $(\exists c\in[a,b])$ $2f(c)=f(a)+f(b)$

2) on pose $g(x)=f(x)-f(c)$ pour tout x de $[a,b]$ montrer que $(\exists\alpha\in[a,b])$ $g(\alpha)=0$

3) on suppose que $\alpha\neq c$. déduire que $(\exists\beta\in[a,b])$ $f'(\beta)=0$

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)$

et $f'(a)f'(b)<0$ montrer que $(\exists c\in]a,b[)$ $f''(c)=0$