arithmétique

EXERCICE 1

Soit n de $\mathbb{N}$. On considère les entiers :

$a = n^4 - n^2 + 1$ et $b = n^4 + n^2 + 1$

1) vérifier que a et b sont impairs

2) soit d un diviseur commun de a et b

Montrer que $d \mid 2n^2$ et $d \mid 2(n^4+1)$

3) montrer que $n^2 \wedge (n^4+1) = 1$

4) déduire $a \wedge b$

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel . on pose :

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1) vérifier que $n-4 \mid a$ et $n-4 \mid b$

2) on considère les nombres $a' = 2n+1$; $b' = n+3$ et soit d un diviseur commun de a' et b'

a) montrer que $d \mid 5$

b) montrer que $(5 \mid n-2) \Leftrightarrow (5 \mid a' \text{ et } 5 \mid b')$

3) montrer que $n \wedge (2n+1) = 1$

4) déterminer suivant n le pgcd de a et b

EXERCICE 3

1) Montrer que 137 est un nombre premier

2) soit p un nombre premier et $p > 3$

a) montrer que $p^2 \equiv 1\ [3]$

b) montrer que $2^p \equiv 2\ [3]$

c) déduire que $2^p + p^2$ n'est pas premiers

EXERCICE 4

pour tout entier naturel n on pose $U_n = 2^n + 5^n$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_{n+2} = 7U_{n+1} - 10U_n$

2) montrer que tout diviseur commun de U_n et U_{n+1} divise 3×2^n et 3×5^n

3) montrer que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux

EXERCICE 5

Soit n un entier de $\mathbb{N}$. on pose $d = n(n^2+5)$

1) montrer que n est pair

2) montrer que $3 \mid d$

3) déduire $(\forall n \in \mathbb{N})\quad n^3 \equiv n\ [6]$

EXERCICE 6

Soient a et b deux entiers de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

Montrer que

si $a^n - b^n$ est premier alors n est premier

EXERCICE 7

soit n un élément de $\mathbb{N}$.

on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$(x-2n)(y-2n) = 2n^2$

on pose $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$

1) montrer que $\delta^2 \mid 2n^2$ et $\delta \mid (x \wedge y)$

2) montrer que $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$

puis déduire que $(x \wedge y) \mid \delta$

3) montrer que $(x \wedge y) \mid n$

EXERCICE 8

Pour tout entier naturel n on pose :

$a_n = 4 \times 10^n - 1$; $b_n = 2 \times 10^n - 1$ et $c_n = 2 \times 10^n + 1$

1) calculer a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 , a_3 , b_3 et c_3

2) montrer que a_n et c_n sont divisible par 3

3) montrer que b_3 est premier

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad b_n \times c_n = a_{2n}$

5) déduire une décomposition en facteur premier du nombre a_6

6) montrer que $b_n \wedge c_n = b_n \wedge 2$

En déduire le pgcd de b_n et c_n

EXERCICE 9

On considère dans $\mathbb{N}$ le système $(S)\ \begin{cases} x \equiv 5\ [8] \\ x \equiv 2\ [3] \end{cases}$

1) a) vérifier que $(2,-5)$ est une solution de l'équation (E) : $8X + 3Y = 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

2) soit (a,b) une solution de (E) .

montrer que $p = 2 \times 8a + 5 \times 3b$ est solution de (S)

3) soit n_0 une solution de (S)

a)montrer que :

si $x \equiv n_0\ [24]$ alors x solution de (S)

b) déterminer les solutions de (S)