

**Exercices d'applications et de réflexions sur L'ARITHMETIQUE**

**Exercices avec solutions**

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

**L'ARITHMETIQUE**

**Exercice1** : montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;

1)  $(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$  , 2)  $5n+3 \wedge (2n+1) = 1$

3)  $n+2 \wedge (n^2+2n-1) = 1$

**Solution** : 1)

on a :  $7(3n+1) - 3(7n+2) = 1$

Donc :  $\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$u(3n+1) + v(7n+2) = 1$   $u = 7$  et  $v = -3$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :

$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$

2)  $(5n+3) \wedge (2n+1) = 1$

Car :  $2 \times (5n+3) + (-5) \times (2n+1) = 1$

3)  $(n+2) \wedge (n^2+2n-1) = 1$

Car  $n \times (n+2) + (-1) \times (n^2+2n-1) = 1$

**Exercice2** : Montrons que :  $360 \wedge 84 = 12$  et déterminer  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que :

$360u + 84v = 12$

**Solution** : on a :  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$  et  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

Donc  $360 \wedge 84 = 2^2 \cdot 3 = 12$

D'autre part :  $360 = 84 \times 4 + 24$  donc :

$24 = a - (b \times 4)$

On a :  $84 = 24 \times 3 + 12$

Donc :  $b - (a - (b \times 4)) \times 3 = 12$

On a :  $24 = 12 \times 2 + 0$

Donc :  $-3a + 13b = 12$

**Exercice3** : Considérons dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

(E):  $17x + 36y = 1$  et déterminons une solution particulière de (E).

**Solution** : On a  $17 \wedge 36 = 1$  donc d'après le théorème de Bézout ; il existe  $u$  et  $v$  tels que :  $17u + 36v = 1$  donc (E) admet une solution.

On pose  $a = 36$  et  $b = 17$  on obtient :

$a = 2b + 2$  et  $b = 8 \times 2 + 1$

Donc :  $2 = a - 2b$  et  $b = 8 \times (a - 2b) + 1$

D'où :  $-8a + 17b = 1$

Donc le couple  $(-8, 17)$  est une solution de l'équation (E).

**Exercice4** : résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

suivante : (E)  $7(x-2) = 3(y+1)$

**Solution** :  $7(x-2) = 3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$

Or on sait que :  $7 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss :  $7/y+1$

Donc  $\exists k \in \mathbb{Z} / y+1 = 7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1$

(E)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3(y+1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2) = 3 \times 7k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 7k - 1 \end{cases}$

Donc  $S = \{(3k+2; 7k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$

**Exercice5** : déterminer l'entier naturel  $n$

tel que :  $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

**Solution** : 1) 2)  $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \mid n(n^2+3n-2)$

or on a :  $1 = (n+1) \wedge n$  car  $(n+1) - n = 1$  (bezout)

Donc :  $\frac{n+1}{n^2+8n-2}$

La division euclidienne de  $n^2+3n-2$  par  $n+1$

Donne :  $n^2+3n-2 = (n+1)(n+2) - 4$

$\frac{n+1}{n^2+3n-2} \text{ et } \frac{n+1}{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{n^2+3n-2} - (n+1) \frac{n+1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{n+1}{-4} \Rightarrow \frac{n+1}{4}$

Il faut que  $n+1 \in \{1; 2; 4\}$  ce qui entraine :

$n \in \{0; 1; 3\}$

Inversement : On vérifie que 0 ; 1 ; 3 vérifient

$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$  Avant de conclure que :

$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3\}$

**Exercice6**: 1) Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}^*$  et  $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

on a :  $a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$

**Solution**: on pose  $d = a \wedge (a+b)$

montrons que :  $d = 1$

$d = a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ et } d/a+b \Rightarrow d/a \text{ et } d/a+b-a$

$$\Rightarrow \Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge a \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

ce qui entraîne:  $1 = a \wedge (a+b)$  (1)

de même on montre que :  $1 = b \wedge (a+b)$  (2)

de (1) et (2) en déduit que :  $(a+b) \wedge ab = 1$

D'après une proposition

Et on a  $a \wedge (a+b) = 1$  et  $a \wedge b = 1$  donc

$a \wedge b(a+b) = 1$  D'après la même proposition

### Exercice7 :

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$$

**Solution :** on a :  $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$

Et on a :  $(2n+5) - 2(n+2) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+2) \wedge (2n+5) = 1 \quad (1)$$

De même : on a :  $2(n+3) - (2n+5) = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$$(n+3) \wedge (2n+5) = 1 \quad (2)$$

de (1) et (2) en déduit que

$$(2n+5) \wedge ((n+3)(n+2)) = 1$$

Donc :  $(2n+5) \wedge (n^2+5n+6) = 1$

**Exercice8 :** Considérons l'équation :

$$(E): 756x - 245y = 14$$

1- Montrer l'équation (E) admet une solution.

2- Déterminer une solution particulière de (E)

3- Résoudre l'équation (E)

**Solution :**  $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$  et  $245 = 5 \times 7^2$

1) On a :  $756 \wedge 245 = 7$  et  $7|14$  donc l'équation (E) admet une solution dans  $\mathbb{Z}^2$

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient :

$$a = 756 \text{ et } b = 245$$

$$a = 3 \times b + 21$$

$$b = 11 \times 21 + 14$$

$$21 = 14 + 7$$

On a donc :  $21 = a - 3b$

$$b = 11 \times (a - 3b) + 14 \Leftrightarrow 14 = 34b - 11a$$

$$7 = (a - 3b) - (34b - 11a) \Leftrightarrow 7 = 12a - 37b$$

Finalement :  $14 = 24a - 74b$  et donc le couple

$(24, 74)$  est une solution particulière de (E)

$$\text{D'où : } S = \left\{ \left( 24 - \frac{245}{7}k; 74 - \frac{756}{7}k \right); k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ (24 - 35k; 74 - 108k); k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \left\{ (24 + 35k; 74 + 108k); k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Exercice9 :** déterminer dans  $\mathbb{N}^2$  les couples

$$(x; y) / \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \text{ avec } x \leq y$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x + y = 48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} x = 4x' \\ y = 4y' \\ x + y = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / 4x' + 4y' = 48$$

$$\Leftrightarrow \exists (x'; y') \in \mathbb{N}^2 / x' + y' = 12$$

On Dresse une table comme suit :

$x'$	0	1	2	3	4	5	6
$y'$	12	11	10	9	8	7	6
$x$	0	4	8	12	16	20	24
$y$	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$$S = \{(0; 48); (4; 44); (8; 40); (12; 36); (16; 32); (20; 28); (24; 24)\}$$

**Exercice10:** résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système

$$\text{suivant: } \begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

**Solution:**

$$\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv -4[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

Car  $2 \wedge 7 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3(5 + 7k) \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 7k; k \in \mathbb{Z} \\ k = 1 + 5k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 7(1 + 5k'); k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{35k' + 12; k' \in \mathbb{Z}\}$$

**Exercice11:** montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x + 2 = 7y + 3$$

$$\Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x - 7y = 1$$

Or on sait que :  $7 \wedge 11 = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / 11u + 7v = 1$$

$$\text{Donc il suffit de prendre : } \begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$$

$$\text{Donc } \exists (x; y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x + 2 \\ n = 7y + 3 \end{cases}$$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

**Exercice12:** résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante: (E)  $5x - 3y = 1$

**Solution :** On a :  $5 \times 2 - 3 \times 3 = 1$  donc (2;3) est une solution particulière de l'équation

Donc :  $5x - 3y = 5 \times 2 - 3 \times 3$

Donc :  $5(x - 2) = 3(y - 3) \Rightarrow 5/3(y - 3)$

Or on sait que :  $5 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss :  $5/y - 3$

Donc  $\exists k \in \mathbb{Z} / y - 3 = 5k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3$

(E)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - 2) = 3(y - 3) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - 2) = 3 \times 5k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = 5k + 3 \end{cases}$

Donc  $S = \{(3k + 2; 5k + 3) / k \in \mathbb{Z}\}$

**Exercice13 :** Montrons que :  $(\forall n \geq 2) : n^5 \equiv n [30]$

**Solution :** On a : d'après le petit théorème de Fermat :  $n^5 \equiv n [5]$  Donc :  $5/n^5 - n$

D'autre part :  $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n((n^2)^2 - 1)$

$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Donc  $2|n(n - 1)$  et  $3|(n - 1)n(n + 1)$  et puisque 2 et 3 sont premiers alors  $6 = (2 \times 3)$  divise  $n^5 - n$

Enfinement :

$\begin{cases} 5/n^5 - n \\ 6/n^5 - n \Rightarrow 30 = 6 \times 5/n^5 - n \\ 6 \wedge 5 = 1 \end{cases}$

Donc :  $n^5 \equiv n [30]$

**Exercice14 :**

1) Montrer pour tout entier naturel n, non nul :  $n^3 - n$  est divisible par 3.

2) Soit p un nombre premier différent de 2,

démontrer que  $N = \sum_{k=0}^{p-2} 2^k$  est divisible par p .

**Solution :**

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme : Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a :  $a^p \equiv a [p]$

Donc  $a^p - a \equiv 0 [p]$ , c'est à dire  $a^p - a$  est divisible par p .

$n \in \mathbb{N}^*$  et 3 est un nombre premier donc  $n^3 - n$  est divisible par 3.

Remarques : on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2)  $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{p-2}$

est la somme des ( p-1) premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de

premier terme  $2^0 = 1$

Donc :  $N = \frac{1 - 2^{p-1}}{1 - 2} = 2^{p-1} - 1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.

On utilise le théorème de Fermat:  $2^{p-1}$  est divisible par p

Par suite : N est divisible par p.

**Exercice15 :** Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p, on a :  $a^p \equiv a [p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a  $a^p \equiv a [p]$  (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.

2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x^n - 1)$  est un multiple de  $(x - 1)$

3. Démontrer que  $a^{561} - a$  est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.

4. En déduire que pour tout entier naturel a :  $a^{561} - a \equiv 0 [561]$

**Solution :**

1)  $561 = 3 \times 11 \times 17$

2)  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

Si x est un entier alors :

$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$  est un entier et  $x - 1$  est un entier.

Conséquence :  $(x^n - 1)$  est un multiple de  $(x - 1)$

Remarque : on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)

3)  $a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$

On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers :  $560 = 2^4 \times 5 \times 7$

560 a donc  $5 \times 2 \times 2 = 20$  diviseurs de 560

$D_{560} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 14; 16; 20; 28; 35; 40; 56; 70; 80; 140; 280; 560\}$

$560 = 2 \times 280$  donc :  $a^{560} = (a^2)^{280}$

On pose  $x = a^2$  et  $n = 280$

$a^{560} - 1$  est un multiple de  $a^2 - 1$ . Donc il existe

$K \in \mathbb{N}$  tel que :  $a^{560} - 1 = (a^2 - 1)K$

Par suite,  $a^{561} - a = a(a^{560} - 1)$

$a^{561} - a = a(a^2 - 1)K$

$a^{561} - a = (a^3 - a)K$

Or  $a^3 - a$  est divisible par 3

Donc,  $a^{561} - a$  est divisible par 3

$a^{560} = (a^{10})^{56}$  On pose  $x = a^{10}$  et  $n = 56$

$a^{560}-1$  est un multiple de  $a^{10}-1$ .  
 Donc il existe  $K' \in \mathbb{N}$  tel que:  $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$   
 Par suite,  $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$   
 $a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$   
 $a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$   
 Or  $a^{11}-a$  est divisible par 11  
 Donc,  $a^{561}-a$  est divisible par 11  
 $a^{560}=(a^{16})^{35}$   
 On pose  $x=a^{16}$  et  $n=35$   
 $a^{560}-1$  est un multiple de  $a^{16}-1$ .  
 Donc il existe  $K'' \in \mathbb{N}$  tel que :  
 $a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$   
 Par suite  $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$   
 $a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$   
 $a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$   
 Or  $a^{17}-a$  est divisible par 17  
 Donc,  $a^{561}-a$  est divisible par 17  
 4) 3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc  
 premiers entre eux 2 à 2.  
 $a^{561}-a$  est divisible par 3; 11 et 17.  
 Donc  $a^{561}-a$  est divisible par  $3 \times 11 \times 17 = 561$   
 Par suite:  $a^{561} - a \equiv 0 [561]$   
 $a^{561} \equiv a [561]$  et pourtant 561 n'est pas un  
 nombre premier.

Donc la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie.

**Exercice 16:** soit  $p$  un nombre premier positif et

$a \in \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge a = 1$  on pose  $F_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}$

1) vérifier que :  $F_p(a) \in \mathbb{N}$

2) soit  $b \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $p \wedge b = 1$

Démontrer que :  $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b) [p]$

**Solution :1)** on a :  $p \wedge a = 1$  et  $p$  un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat :

$a^{p-1} - 1 \equiv 0 [p]$  donc :  $\frac{a^{p-1} - 1}{p} \equiv 0 [p]$

Donc :  $F_p(a) \in \mathbb{N}$

2) d'après le théorème de Fermat :

$a^{p-1} - 1 \equiv 0 [p]$  et  $b^{p-1} - 1 \equiv 0 [p]$

Donc :  $(a^{p-1} - 1)(b^{p-1} - 1) \equiv 0 [p^2]$

Donc :  $(ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1 \equiv 0 [p^2]$

Donc :  $(ab)^{p-1} - 1 \equiv (a^{p-1} - 1) + (b^{p-1} - 1) [p^2]$

Donc :  $\frac{(ab)^{p-1} - 1}{p} \equiv \frac{a^{p-1} - 1}{p} + \frac{b^{p-1} - 1}{p} [p]$

Donc :  $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b) [p]$

**Exercice 17 :** soit  $n \in \mathbb{Z}$  on pose :

$u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$

1) Démontrer que :  $u_n \equiv 0 [5]$

2) Démontrer que :  $u_n \equiv 0 [7]$

3) en déduire que :  $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

**Solution :1)**

on a : 5 est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat :  $n^5 \equiv n [5]$

et on a :  $5n^7 \equiv 0 [5]$  et  $7n^5 \equiv 7n \equiv 2n [5]$

et  $23n \equiv 3n [5]$

donc :  $u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 0 [5]$

**2)** on a : 7 est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat :  $n^7 \equiv n [7]$

et on a :  $5n^7 \equiv 5n [7]$  et  $7n^5 \equiv 0 [7]$

et  $23n \equiv 2n [7]$  donc  $u_n \equiv 7n [5]$

donc :  $u_n \equiv 0 [7]$

**3)** on a :  $5/u_n$  et  $7/u_n$  et  $5 \wedge 7 = 1$

Donc :  $5 \times 7 / u_n$  cad  $35 / u_n$

Donc :  $\frac{u_n}{35} \in \mathbb{Z}$  donc :  $\frac{5n^7 + 7n^5 + 23n}{35} \in \mathbb{Z}$

donc :  $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

**Exercice 18 :** Considérons dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation

(E):  $x^4 + 781 = 3y^4$

1) monter que :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1 [5]$  ou  $x^4 \equiv 0 [5]$

2) monter que :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 + 781 \equiv 2 [5]$

Ou  $x^4 + 781 \equiv 1 [5]$

3) en déduire les solutions de l'équation (E)

**Solution :** 1) on a : 5 est un nombre premier donc : a) si 5 ne divise pas  $x$  alors : d'après le théorème de Fermat :  $x^4 \equiv 1 [5]$

b) si 5 divise  $x$  alors : d'après le théorème de Fermat :  $x^4 \equiv 0 [5]$

donc :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1 [5]$  ou  $x^4 \equiv 0 [5]$

**2)** on a :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 \equiv 1 [5]$  ou  $x^4 \equiv 0 [5]$

Donc :  $\forall x \in \mathbb{Z} : x^4 + 781 \equiv 2 [5]$  ou  $x^4 + 781 \equiv 1 [5]$

3) on a :  $\forall y \in \mathbb{Z} : y^4 \equiv 1 [5]$  ou  $y^4 \equiv 0 [5]$

Donc :  $3y^4 \equiv 0 [5]$  ou  $3y^4 \equiv 3 [5]$

Mais on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x^4 + 781 \equiv 1[5] \\ 3y^4 \equiv 0[5] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^4 + 781 \equiv 2[5] \\ 3y^4 \equiv 3[5] \end{cases}$$

Donc :  $\forall x \in \mathbb{Z}$  et  $\forall y \in \mathbb{Z}$   $x^4 + 781 \neq 3y^4$

Donc :  $S = \emptyset$

**Exercice19** : soit dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante:

$$(E) : 36x - 25y = 5$$

1) montrer que si  $(x; y)$  est une solution de

l'équation  $(E)$  alors  $x$  est un multiple de 5

2) déterminer une solution particulière de l'équation  $(E)$  et résoudre  $(E)$

3) soit  $(x; y)$  une solution de l'équation  $(E)$

Et  $x \wedge y = d$ . Déterminer les valeurs possibles

de  $d$  et Déterminer les solutions  $(x; y)$  de  $(E)$

tel que  $x \wedge y = 1$

**Solution** : 1)  $(x; y) \in S \Leftrightarrow 36x - 25y = 5$

$$\Leftrightarrow 36x = 5(1 + 5y) \Rightarrow 5/36x$$

Or on sait que :  $5 \wedge 36 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss :  $5/x$

Donc  $x$  est un multiple de 5

Donc :  $\exists x' \in \mathbb{Z} : x = 5x'$

2) déterminons une solution particulière de l'équation  $(E)$  ?

$$\text{On a : } 36x - 25y = 5 \Leftrightarrow 36 \times 5x' - 25y = 5$$

$$\Leftrightarrow 36x' - 5y = 1$$

On remarque que :  $(1; 7)$  est une solution

particulière de l'équation :  $36x' - 5y = 1$

Donc :  $(5; 7)$  est une solution particulière de

l'équation  $(E)$

$$(x; y) \in S \Leftrightarrow 36x - 25y = 5 \text{ et } 36 \times 5 - 25 \times 7 = 5$$

$$\Leftrightarrow 36(x - 5) = 25(y - 7)$$

On a donc :  $36/25(y - 7)$  Et puisque :  $25 \wedge 36 = 1$

Alors :  $36/y - 7$  Donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} / y - 7 = 36k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 36(x - 5) = 25(y - 7) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5 = 25k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = 25k + 5 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 36k + 7 \end{cases}$$

Inversement :  $(25k + 5; 36k + 7)$  est solution de l'équation  $(E)$

$$\text{Donc } S = \{(25k + 5; 36k + 7) / k \in \mathbb{Z}\}$$

3) soit  $(x; y) \in S$  déterminons :  $x \wedge y = d$

On a :  $\exists k \in \mathbb{Z} / x = 25k + 5$  et  $y = 36k + 7$

$$\text{Et on a : } \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases} \Rightarrow d/36x - 25y = 5$$

Donc :  $d = 1$  ou  $d = 5$

Si  $d = 5$  alors  $5/y = 7 + 36k$  car  $5/x$

$$\text{Donc : } 7 + 36k \equiv 0[5] \text{ cad } 2 + k \equiv 0[5] \text{ cad } k \equiv 3[5]$$

Si  $d = 1$  alors  $k \equiv 4[5]$  ou  $k \equiv 2[5]$  ou  $k \equiv 1[5]$

ou  $k \equiv 0[5]$  donc :

$$k = 4 + 5\alpha \text{ ou } k = 2 + 5\alpha \text{ ou } k = 1 + 5\alpha \text{ ou } k = 5\alpha$$

Avec :  $\alpha \in \mathbb{Z}$

Donc :  $(x; y) \in S$  et  $x \wedge y = 1$  ssi

$$(x; y) \in \{(125\alpha + 30; 180\alpha + 43); (125\alpha + 55; 180\alpha + 79); (125\alpha + 105; 180\alpha + 151); (125\alpha + 5; 180\alpha + 7); \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

**Exercice20**: on pose  $A = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1) soit  $a \in A$  discuter suivant  $a$  le nombre de solutions de l'équation :  $(E) x^2 = a$  dans  $A$

2) soient  $p$  et  $q$  deux éléments de  $A$

On considère l'équation :  $(F) x^2 - 2px + q = \bar{0}$

Montrer que l'équation :  $(E)$  admet une solution

ssi  $p^2 - q$  appartient à un ensemble  $B$  à déterminer

3) application :

a) résoudre dans  $A$  l'équation:  $x^4 + 3x^2 + 4 = \bar{0}$   $(G)$

b) déterminer les nombres entiers naturels  $b$

Tels que : 11 divise  $\overline{10304}_{(b)}$

**Solution :1)** On Dresse une table comme suite :

$x$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$
$x^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

l'équation :  $(E)$  admet une solution unique dans

$A$  si  $a = 0$

l'équation :  $(E)$  admet deux solution différentes

dans  $A$  si  $a \in \{\bar{1}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{9}\}$

l'équation :  $(E)$  n'admet pas de solution dans  $A$

si  $a \in \{\bar{2}; \bar{6}; \bar{7}; \bar{8}; \bar{10}\}$

2)  $x \in A$  ;  $(F) x^2 - 2px = (x - p)^2 - p^2$

$$x^2 - 2px + q = \bar{0} \Leftrightarrow (x - p)^2 = p^2 - q$$

l'équation :  $(F)$  admet une solution dans  $A$  ssi

$$p^2 - q \in \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{9}\} \text{ donc : } B = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{9}\}$$

3) a) résoudre dans  $A$  l'équation :  $x^2 + \bar{3}x + \bar{4} = \bar{0}$   
( $G$ ) ?

$$x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{4} = \bar{0} \Leftrightarrow X^2 + \bar{3}X + \bar{4} = \bar{0} \text{ avec : } X = x^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 - \bar{8}X + \bar{16} = \bar{0} \text{ car } \bar{4} = \bar{15} \text{ et } \bar{3} = -\bar{8}$$

$$\Leftrightarrow (X - \bar{4})^2 = \bar{1} \Leftrightarrow X - \bar{4} = \bar{1} \text{ ou } X - \bar{4} = \bar{10}$$

$$(G) \Leftrightarrow X = \bar{5} \text{ ou } X = \bar{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \bar{5} \text{ ou } x^2 = \bar{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \bar{4} \text{ ou } x = \bar{7} \text{ ou } x = \bar{5} \text{ ou } x = \bar{6}$$

Donc : l'ensemble des solutions de ( $G$ ) est :

$$S = \{\bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$$

3) b) déterminons les nombres entiers naturels  $b$

Tels que : 11 divise  $\overline{10304}_{(b)}$  ?

$$\text{On a : } \overline{10304}_{(b)} = b^4 + 3b^2 + 4$$

$$\frac{11}{\overline{10304}_{(b)}} \Leftrightarrow b^4 + 3b^2 + 4 \equiv 0[11]$$

$$\Leftrightarrow \bar{b}^4 + 3\bar{b}^2 + \bar{4} = \bar{0} \text{ dans } A$$

$$\Leftrightarrow \bar{b} \in \{\bar{4}; \bar{5}; \bar{6}; \bar{7}\}$$

$$\Leftrightarrow \bar{b} \in \bar{4} \cup \bar{5} \cup \bar{6} \cup \bar{7} \Leftrightarrow b = 11k + r \text{ et } r \in \{4; 5; 6; 7\}$$

Et  $k \in \mathbb{N}$

**Exercice 21:** On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls  $m$ ,  $n$  et  $a$  tels que:

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1$$

1) Soit  $p$  un nombre premier quelconque divisant  $4m + 3$ .

Montrer que  $p$  est impair et que :

$$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :  $p \equiv 1[4]$

3. En utilisant la décomposition de  $4m + 3$  en facteurs premiers obtenir une contradiction

**Solution :**

$$1) 4m \equiv 0[2] \text{ donc } 4m + 3 \equiv 3[2] \text{ donc}$$

$$4m + 3 \equiv 1[2]$$

$4m + 3$  n'est pas divisible par 2 donc  $p \neq 2$  et donc  $p$  est impair.

$p$  est impair donc  $p = 2q + 1$  avec  $q \in \mathbb{N}$

$p$  est un diviseur de  $4m + 3$

$4m + 3$  est un diviseur de  $4a^2 + 1$

Donc  $p$  est un diviseur de  $4a^2 + 1$

$$\text{Par suite : } 4a^2 + 1 \equiv 0[p] \text{ donc } 4a^2 \equiv -1[p]$$

$$\text{donc } (2a)^2 \equiv -1[p] \text{ donc } (2a)^{2q} \equiv (-1)^q [p]$$

$$\text{Or, } 2q \equiv p - 1 \text{ donc } q \equiv \frac{p-1}{2}$$

$$\text{On a donc : } (2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

2) Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que  $p$  et  $2a$  sont premiers entre eux.

$p$  étant un nombre premier il suffit de vérifier que  $p$  n'est pas un diviseur de  $2a$ .

On suppose que  $2a \equiv 0[p]$

$$\text{On a alors } 4a^2 \equiv 0[p] \text{ et donc } 4a^2 + 1 \equiv 1[p]$$

Or, on a vu dans la question précédente que :

$$4a^2 + 1 \equiv 0[p]$$

Donc  $p$  n'est pas un diviseur de  $2a$  et  $p$  et  $2a$  sont premiers entre eux

D'après le théorème de Fermat :

$$(2a)^{p-1} \equiv 1[p]$$

Or d'après la première question :

$$(2a)^p - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$$

$$\text{On a donc : } (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$$

Cela signifie que  $\frac{p-1}{2}$  est un nombre pair.

Or  $q \equiv \frac{p-1}{2}$  Donc  $q$  est un nombre pair.

Il existe  $q' \in \mathbb{N}$  tel que  $q = 2q'$

$$p = 2q + 1$$

$$p = 4q' + 1$$

$$\text{et donc : } p \equiv 1[4]$$

$$3) 4m + 3 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m} \equiv 1[p]$$

$p_1 ; p_2 ; \dots ; p_m$  sont des nombres premiers distincts. et  $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \dots ; \alpha_m$  sont des entiers naturels non nuls.

$p_1 ; p_2 ; \dots ; p_m$  sont des nombres premiers qui divisent  $4m + 3$

D'après la question précédente :

$$p_1 \equiv 1[4] \text{ et } p_2 \equiv 1[4] \text{ et } \dots \text{ et } p_m \equiv 1[4]$$

$$\text{Donc : } p_1^{\alpha_1} \equiv 1[4] ; p_2^{\alpha_2} \equiv 1[4] \dots p_m^{\alpha_m} \equiv 1[4]$$

$$\text{Par suite : } p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m} \equiv 1[4]$$

$$4m + 3 \equiv 1[4]$$

$$\text{Or, } 4m \equiv 0[4] \text{ donc : } 4m + 3 \equiv 3[4]$$

Il y a contradiction, il n'existe pas des entiers naturels non nuls  $m$ ,  $n$  et  $a$  tels que:

$$(4m + 3)(4n + 3) = 4a^2 + 1$$

**Exercice 22 :** Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  on a  $N = n^{13} - n$  est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

**Solution :** 13 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :

$n^{13}-n$  est divisible par 13.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$$

$12=2^2 \times 3$  donc : Le nombre 12 à 6 diviseurs

$$D_{12} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-n)(n^6+1)$$

7 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :

$$n^7-n \text{ est divisible par } 7.$$

Par suite,  $n^{13}-n$  est divisible par 7.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$$

On utilise le résultat de l'exercice précédent :

$$n[(n^4)^3-1] \text{ est un multiple de } n^4-1$$

$$\text{Donc il existe } K \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n^4)^3-1=(n^4-1)K$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)K=(n^5-n)K$$

5 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :  $n^5-n$  est divisible par 5. Par suite,  $n^{13}-n$  est divisible par 5

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$$

On utilise le résultat de l'exercice précédent :

$$(n^2)^6-1 \text{ est un multiple de } n^2-1.$$

$$\text{Donc il existe } K' \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n^2)^6-1=(n^2-1)K'$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=(n^3-n)K'$$

3 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :  $n^3-n$  est divisible par 3.

Par suite,  $n^{13}-n$  est divisible par 3.

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$$

On utilise le résultat de l'exercice précédent :

$$n^{12}-1 \text{ est un multiple de } n-1$$

$$\text{Donc il existe } K'' \in \mathbb{N} \text{ tel que : } n^{12}-1=(n-1)K''$$

$$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$$

2 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :  $n^2-n$  est divisible par 2.

Par suite,  $n^{13}-n$  est divisible par 2.

### Exercice50 :

1) Soient  $p$  et  $q$  deux nombres premiers distincts montrer que  $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

2) Considérons dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :

$$(E) : x^4 + 781 = 3y^4$$

Et soit  $S$  son ensemble de solution :

a) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z}) (x^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ ou } x^4 \equiv 0 \pmod{5})$

b) Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z}) (x^4 + 781 \equiv 2 \pmod{5} \text{ ou } x^4 + 781 \equiv 1 \pmod{5})$

c) Déterminer l'ensemble  $S$ .

**Exercice23 :** Soit Le nombre  $n = \overline{2987}_{(10)}$

Écrire  $n$  dans la base 6 :

**Solution :**

$$\text{On a : } 2987 = 6 \times 497 + 5$$

$$497 = 6 \times 82 + 5$$

$$82 = 6 \times 13 + 4$$

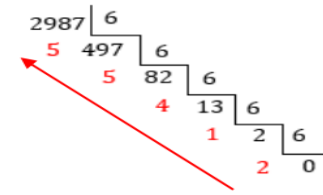
$$13 = 6 \times 2 + 1$$

$$2 = 6 \times 0 + 2$$

$$\text{Donc } 2987 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5$$

$$n = \overline{21455}_{(6)}$$

Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme suite :



**Exercice24 :** soit  $N = \overline{dcba}_{(10)}$  un entier naturel

montrer que :  $N \equiv a - b + c - d \pmod{11}$

**Solution :**

$$\text{on a : } N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$$

$$\text{et on a : } 10 \equiv -1 \pmod{11} \text{ et } 10^2 \equiv 1 \pmod{11} \text{ et } 10^3 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$\text{Donc : } N \equiv a - b + c - d \pmod{11}$$

**Exercice25 :** calculer :

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)}$$

**Solution :**

a) La décomposition :

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 4 \times 7^0 + 6 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 1 \times 7^0$$

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 11 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$$

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$$

$$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = \overline{3465}_{(7)}$$

b) Calcul direct avec le retenu

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{2534}_{(7)} \\ + \underline{631}_{(7)} \\ \hline = 3465_{(7)} \end{array}$$

**Exercice26:** calculer

$$1) \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} \quad 2) \overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$$

**Solution :** Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant le calcul direct avec le retenu car la décomposition risque d'être longue :

$$\overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} = \overline{23242}_{(8)}$$

$$\text{Pour vérifier : } \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)}$$

$$= (3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7) \times (5 \times 8 + 6)$$

$$= 9890 = \overline{23242}_{(8)}$$

$$2) \overline{432}_{(5)} \times \overline{134}_{(5)}$$

$$= (4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2) \times (5^2 + 3 \times 5 + 4)$$

$$= 4 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 12 \times 5^3 + 9 \times 5^2 + 6 \times 5 + 16 \times 5^2 + 12 \times 5 + 8$$

$$= 5^5 + 3 \times 5^4 + 5^3 + 4 \times 5 + 3$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 25 \\ \times \overline{327}_{(8)} \\ \hline \quad \overline{56}_{(8)} \\ \hline \quad \quad 2412 \\ + \quad \quad \overline{2063} \\ \hline = \overline{23242}_{(8)} \end{array}$$

$$= \overline{131043}_{(5)}$$

**Exercice27 :** effectuer dans la base 9

$$6432_{(7)} \times 54_{(8)}$$

**Solution :**

$$6432_{(7)} \times 54_{(8)} =$$

$$= (6 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 2) \times (5 \times 8 + 4)$$

$$= 100188$$

$$= 1 \times 9^5 + 6 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 8 \times 9 + 0$$

$$= \overline{162380}_{(9)}$$

**Exercice28 :** monter que

$$1) x \equiv 0 [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 5$$

$$2) x \equiv 0 [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0, 25, 50, 75\}$$

$$3) x \equiv 0 [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [3]$$

$$4) x \equiv 0 [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \equiv 0 [9]$$

$$5) x \equiv 0 [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \equiv 0 [11]$$

$$6) x \equiv 0 [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0 [4]$$

**Exercice29 :** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

$$\text{où } (a_n; b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

Montrer que :  $a_n \wedge b_n = 1$

**Solution :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

En développant  $(1 + \sqrt{2})^n$  par la formule du binôme de Newton et en séparant les termes où  $\sqrt{2}$  apparaît à un exposant pair des termes où  $\sqrt{2}$  apparaît à un exposant impair, on écrit

$(1 + \sqrt{2})^n$  sous la forme  $a_n + b_n \sqrt{2}$  où

$$(1 + \sqrt{2})^n \text{ sous la forme } a_n + b_n \sqrt{2} \text{ où}$$

$$(a_n; b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2. \text{ Un calcul conjugué fournit}$$

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2} \text{ et donc :}$$

$$(1 - \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2})^n = (-1)^n = (a_n + b_n \sqrt{2})(a_n - b_n \sqrt{2})$$

$$(-1)^n = a_n^2 - 2b_n^2 \text{ Ou finalement :}$$

$$\left( (-1)^n \times a_n \right) a_n + \left( 2(-1)^{n+1} \times b_n \right) \times b_n = 1$$

$$\text{donc : } ua_n + vb_n = 1$$

$$\text{où } u = (-1)^n \times a_n \text{ et } v = 2(-1)^{n+1} \times b_n$$

Sont des entiers relatifs. Le théorème de Bézout permet d'affirmer  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers

Entre eux.

**Exercice30 :** 1) Montrer que  $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \text{ et } (n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$$

2) Montrer que  $\forall (k; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$k \wedge n = 1 \Rightarrow \frac{n}{C_n^k}$$

3) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n+1}{C_{2n}^n}$

**Solution : 1)**

$$kC_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

$$(n+1)C_{2n}^{n-1} = (n+1) \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}$$

$$nC_{2n}^n = n \frac{(2n)!}{n!(n)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n)!} \text{ cqfd}$$

2) on a :  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$  Donc  $\frac{n}{kC_n^k}$  et puisque

$k$  et  $n$  sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que  $\frac{n}{C_n^k}$

3) De même, on a :  $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$

Donc :  $\frac{n+1}{nC_{2n}^n}$  et on montre que

$n$  et  $(n+1)$  sont premiers entre eux (d'après Bézout puisque  $(n+1) - n = 1$  donc d'après le théorème de Gauss :  $\frac{n+1}{C_{2n}^n}$ )

**Exercice 31 :** Pour  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_n = 2^{2^n} + 1$  (Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

**Solution :**

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels tels que  $n < m$ . Posons  $m = n + k$  avec  $k > 0$ . On note que

$$F_m = 2^{2^{n+k}} + 1 = \left( 2^{2^n} \right)^{2^k} + 1 = (F_n - 1)^{2^k} + 1$$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de Newton et en tenant compte du fait que  $2^k$  est pair

Puisque  $k$  est strictement positif, on obtient une expression de la forme

$$F_m = qF_n + 1 + 1 = qF_n + 2 \text{ Où } q \text{ est un entier.}$$

Le PGCD de  $F_n$  et  $F_m$  doit encore diviser :

$$F_m - qF_n = 2 \text{ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque}$$

$2^n$  et  $2^m$  sont strictement positifs  $F_n$  et  $F_m$  sont impairs et leur PGCD vaut donc 1 (ce résultat redémontre aussi l'existence d'une infinité de nombres premiers).

**Exercice 32 :**



1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{6}{5n^3 + n}$

2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$

**Solution :**

1) Soit n un entier relatif.

• Si n est pair, alors  $5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0 \equiv 0 \pmod{2}$  ou encore  $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{2}$ . Dans ce cas,  $5n^3 + n$  est divisible par 2.

Si n est impair, alors  $5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1 \equiv 6 \pmod{2}$  ou encore  $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{2}$ . Dans ce cas aussi,  $5n^3 + n$  est divisible par 2.

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{Z}, 2 \mid (5n^3 + n)$ .

• Si n est multiple de 3, alors :

$5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0 \equiv 0 \pmod{3}$  ou encore  $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{3}$ .

Dans ce cas,  $5n^3 + n$  est divisible par 3.

Si n est de la forme  $3k + 1$  où  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1 \equiv 6 \pmod{3}$  et donc  $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{3}$ .

Par suite,  $5n^3 + n$  est divisible par 3.

Si n est de la forme  $3k + 2$  où  $k \in \mathbb{Z}$ , alors,  $5n^3 + n \equiv 5 \times 2^3 + 2 \equiv 42 \pmod{3}$  et donc  $5n^3 + n \equiv 0 \pmod{3}$ .

Dans ce cas aussi,  $5n^3 + n$  est divisible par 3.

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{Z}, 3 \mid (5n^3 + n)$ .

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{Z}, 5n^3 + n$  est divisible par les nombres premiers 2 et 3 et donc par :  $2 \times 3 = 6$ . On a montré que  $\forall n \in \mathbb{Z}, 6 \mid (5n^3 + n)$ .

2) Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$

2)  $4^{2^n}$  signifie  $(\dots((4^2)^2)\dots)^2$

Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7.

$4^{2^0} = 4$  et donc  $4^{2^0} \equiv 4 \pmod{7}$ .

Ensuite,  $4^{2^1} \equiv 16 \pmod{7}$  ou encore  $4^{2^1} \equiv 2 \pmod{7}$ .

Ensuite,  $4^{2^2} \equiv 2^2 \pmod{7}$  ou encore  $4^{2^2} \equiv 4 \pmod{7}$  ...

Montrons par récurrence que :

$\forall k \in \mathbb{N}, 4^{2^{2k}} \equiv 4 \pmod{7}$  et  $4^{2^{2k+1}} \equiv 2 \pmod{7}$ .

• C'est vrai pour  $k = 0$ .

• Soit  $k > 0$ . Supposons que :

$4^{2^{2k}} \equiv 4 \pmod{7}$  et  $4^{2^{2k+1}} \equiv 2 \pmod{7}$ .

Alors :  $4^{2^{2k+2}} = (4^{2^{2k+1}})^2 \equiv (2)^2 \equiv 4 \pmod{7}$

$4^{2^{2k+3}} = (4^{2^{2k+2}})^2 \equiv (4)^2 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$

On a montré par récurrence que  $\forall k \in \mathbb{N}$

$4^{2^{2k}} \equiv 4 \pmod{7}$  et  $4^{2^{2k+1}} \equiv 2 \pmod{7}$ .

Ensuite 2

$2^{2^0} \equiv 2 \pmod{7}$  et  $2^{2^1} \equiv 4 \pmod{7}$

puis, pour  $n > 1, 2^{2^n} = 2^{2 \times 2^{n-1}} = (2^2)^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} = 2$

donc :  $2^{2^{2k}} \equiv 2 \pmod{7}$  et  $2^{2^{2k+1}} \equiv 4 \pmod{7}$ .

Ainsi, que n soit pair ou impair  $4^{2^n} + 2^{2^n} \equiv 6 \pmod{7}$

donc :  $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod{7}$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}, \frac{7}{4^{2^n} + 2^{2^n} + 1}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien